Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Sobre a conjectura do número de queima de um grafo

Lucas Sepeda Lima

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof. Dr. Fábio H. Botler

São Paulo
2025

Ao Blues, pela companhia silenciosa.

Resumo

Lucas Sepeda Lima. **Sobre a conjectura do número de queima de um grafo**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

O processo de queima de grafos foi introduzido como um modelo determinístico para a propagação de informação em redes, dando origem ao parâmetro conhecido como número de queima. Uma conjectura central associada a esse processo afirma que todo grafo conexo com n vértices possui número de queima no máximo $\lceil \sqrt{n} \rceil$. O objetivo deste trabalho é estudar de forma detalhada e sistemática a prova recente de Norin e Turcotte de que essa conjectura vale assintoticamente, isto é, que $b(G) \leq (1 + o(1))\sqrt{n}$. Em vez de focar apenas no resultado final, o trabalho dedica-se a explicar cuidadosamente todas as etapas do argumento, reconstruindo a cadeia lógica completa que leva do modelo discreto original ao limitante assintótico. A metodologia adotada baseia-se na reinterpretação da queima como um problema de cobertura por bolas, na passagem para o cenário contínuo de árvores métricas e na introdução de ferramentas probabilísticas centrais, como coberturas aleatórias, a medida de expectativa e o controle do momento associado a essas distribuições. Ao longo do texto, investigam-se com atenção as técnicas probabilísticas empregadas, destacando seu papel na obtenção de distribuições quase uniformes de raios e na globalização dos resultados locais. Por fim, analisa-se o retorno dessas construções ao contexto discreto, completando a demonstração do comportamento assintótico da conjectura. O trabalho tem caráter expositivo e visa tornar o método de Norin e Turcotte acessível e reutilizável em problemas análogos de cobertura em grafos.

Palavras-chave: Número de queima. Queima de grafos. Coberturas em árvores. Métodos probabilísticos. Teoria dos grafos.

Abstract

Lucas Sepeda Lima. **About the burning number conjecture**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

The graph burning process was introduced as a deterministic model for the spread of information in networks, giving rise to the parameter known as the burning number. A central conjecture associated with this process states that every connected graph on n vertices has burning number at most $\lceil \sqrt{n} \rceil$. The aim of this work is to study in detail the recent proof by Norin and Turcotte that this conjecture holds asymptotically, namely that $b(G) \leq (1 + o(1))\sqrt{n}$. Rather than focusing solely on the final result, the text is devoted to a careful explanation of each step of the argument, reconstructing the full logical chain that leads from the original discrete burning model to the asymptotic bound. The methodology follows the original approach closely, reinterpreting burning as a covering problem, passing to the continuous setting of metric trees, and introducing key probabilistic tools such as random coverings, expectation measures, and moment control. Special attention is given to the probabilistic techniques employed and to their role in producing near-uniform distributions of radii and in globalizing local constructions. Finally, the transfer of these results back to the discrete graph setting is analyzed, completing the asymptotic argument. This work is expository in nature and aims to make the method of Norin and Turcotte transparent and accessible for future applications to related covering problems in graph theory.

Keywords: Burning number. Graph burning. Tree coverings. Probabilistic methods. Graph theory.

Sumário

Capítulo 1

O processo de queima

1.1 Propagação de informação e modelagem em grafos

A difusão de "contágios" - sejam vírus biológicos, pacotes de dados ou memes - é objeto recorrente de análise em Ciência da Computação. Uma rede de computadores, por exemplo, deve distribuir rapidamente atualizações de software; já redes sociais on-line difundem tendências que podem atingir milhões de usuários em poucos minutos. Tais fenômenos foram abstraídos em diversos processos sobre grafos, como *bootstratp percolation* e o problema do *Firefighter*. Em 2014, Bonato, Janssen e Roshanbin introduziram o *processo de queima* de um grafo (graph burning) como um modelo determinístico discreto dessa difusão, inspirado inclusive por observações empíricas em plataformas como Facebook e Twitter.

1.2 O processo de queima

Seja $G = (V, E)$ um grafo finito e conexo. No passo 0 todos os vértices estão *não-queimados*. Em cada passo $t \geq 1$:

1. escolhe-se **um** vértice não-queimado e inicia-se um novo foco de fogo nesse vértice tornando-o *queimado*;
2. se $u \in V(G)$ possui um vizinho não queimado no passo $t - 1$, queimamos u.

O processo termina quando todos os vértices de V estão queimados. Observe que as escolhas feitas em 1 descrevem uma sequência de vértices de G. Tal sequência é chamada de *sequência de ignição.* O *número de queima* $b(G)$ é o menor k para o qual existe uma sequência de ignição capaz de queimar G em k passos.

Introduzimos, a seguir, a caracterização métrica do número de queima não apenas por mera elegância formal, mas porque ela fornece a lente adequada para as técnicas que serão empregadas nos capítulos subsequentes. Observa-se, em primeiro lugar, que o próprio processo de queima pode ser reinterpretado como um problema de cobertura: todo vértice deve pertencer a uma vizinhança fechada cujo raio decresce com o passo em que a fonte correspondente é queimada, e a união dessas bolas contém todos os vértices de G. Ao privilegiar essa perspectiva, passamos a trabalhar diretamente com propriedades métricas do grafo - ou, quando conveniente, de sua versão contínua - o que permite abstrair detalhes de escala e recorrer a ferramentas de análise de coberturas bem comportadas e quase uniformes, centrais para as provas modernas dos melhores limitantes conhecidos para $b(G)$. Em outras palavras, a passagem do modelo discreto para a linguagem de cobertura por bolas cria um ponto de conexão natural com os resultados clássicos de geometria de grafos e teoria métrica, viabilizando o uso de métodos probabilísticos e argumentos de decomposição que aparecerão, por exemplo, na construção de árvores métricas e na prova do principal teorema discutido nessa tese.

Seja $d_G(u,v)$ a distância entre u e v, isto é, o número de arestas de um caminho mínimo que os conecta. Para $v \in V(G)$ e $r \geq 0$ definimos a *vizinhança fechada* (ou *bola*) de raio r centrada em v por:

$$N_r[v] = \{u \in V \ : \ d_G(u,v) \leq r\}$$

escrevendo simplesmente $N[v]$ quando $r = 1$. Dizemos que um conjunto de bolas $\{N_{r_i}[x_i]\}_{i=1}^m$ *cobre* G se $\bigcup_{i=1}^m N_{r_i}[x_i] = V(G)$.

Observa-se que, se $(x_1, \dots, x_k)$ queima G em k passos, então cada vértice é queimado por uma fonte a cuja distância é no máximo $k - i$; consequentemente,

$$N_{k-1}[x_1] \cup N_{k-2}[x_2] \cup \dots \cup N_0[x_k] = V(G)$$

com a restrição adicional $d_G(x_i, x_j) \geq j - i$ para $i < j$. Isso porque, se $(x_1, \dots, x_k)$ é uma sequência de ignições, então no instante $j - 1$ o fogo proveniente de x_i já se propagou por todas as arestas contidas em um caminho de comprimento $j - 1$ (inclusive) em torno de x_i. Consequentemente, se dois vértices x_i e x_j com $i < j$ estivessem a uma distância estritamente menor que $j - i$, o vértice x_j já teria sido alcançado pelo fogo iniciado em x_i antes do passo j e, portanto, não poderia ser escolhido como nova fonte. Daí a restrição.

A recíproca também é verdadeira: suponha que existam vértices $x_1, \dots, x_k$ satisfazendo a condição de distância acima tais que $N_{k-1}[x_1] \cup N_{k-2}[x_2] \cup \dots \cup N_0[x_k] = V(G)$. Queima-se x_1 no passo 1, x_2 no passo 2 e assim sucessivamente até x_k no passo k. A desigualdade $d_G(x_i, x_j)$ garante que x_j continua não-queimado até o início do passo j; logo a sequência é bem definida. Além disso, para qualquer vértice $v \in V(G)$ há um índice i com $d_G(v, x_i) \leq k - i$; como o fogo iniciado em x_i avança uma unidade de raio a cada passo, v será alcançado, no máximo, no instante $i + (k - i) = k$. Portanto todos os vértices estão queimados ao final do passo k, o que mostra que a cobertura descrita produz efetivamente uma sequência de ignição de comprimento k. Assim, a existência de tal cobertura equivale dizer que $b(G) \leq k$. Assim obtemos a caracterização métrica

$$b(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \text{ tal que } G \text{ pode ser coberto por bolas de raios } 0, 1, \dots, k-1\}$$

que será explorada nos próximos capítulos.

1.3 A Conjectura do Número de Queima

Bonato et al. mostraram que caminhos alcançam a cota $b(P_n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ e propuseram a conjectura do Número de Queima

Conjecture 1.3.1. *Se G é conexo com n vértices, então $b(G) \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$.*

A conjectura repousa no cerne da teoria: caminhos seriam justamente os grafos "mais difíceis"de queimar. Nos últimos anos, diversos esforços reduziram a constante multiplicativa em frente de $\sqrt{n}$: de $2\sqrt{n} - 1$ para $(4n/3)^{1/2} + 1$, culminando em $b(G) \leq (1 + o(1))\sqrt{n}$, resultado obtido por Norin & Turcotte (2024). Este avanço, objeto central do presente trabalho, confirma a conjectura de forma assintótica.

Capítulo 2

Árvores métricas e Reduções estruturais

A estratégia de prova de Norin e Turcotte (2024) para a solução assintótica da conjectura do número de queima é baseada na transição de estruturas discretas para estruturas contínuas. Em vez de lidar com grafos diretamente, as árvores são embutidas em um espaço métrico por meio da substituição de cada aresta por um intervalo fechado de comprimento positivo. Essa reformulação permite o uso de argumentos de compacidade, decomposições contínuas e coberturas probabilísticas por bolas de tamanho real. Como cada grafo conexo G possui uma árvore geradora T e $b(G) \leq b(T)$ (Bonato et al., 2016), é suficiente mostrar o resultado assintótico para árvores.

Nesse capitulo, apresentamos a formalidade dessas estruturas métricas, os lemas de decomposição que governam essas estruturas e outros resultados fundamentais de diâmetro e profundidade. Essas ferramentas servirão como o alicerce para os argumentos de cobertura e probabilidade desenvolvidos nos capítulos seguintes.

2.1 Árvores métricas: Definições e propriedades básicas

Seja T_0 uma árvore finita. A *árvore métrica* T é obtida de T_0 substituindo as arestas por um intervalo fechado de comprimento real positivo, sendo as extremidades do intervalo os vértices incidentes da aresta substituída em T_0. O comprimento de T, denotado por T, é a soma dos comprimentos desses intervalos. A métrica $d_T(u, v)$ entre os pontos $u, v \in T$ é definida como o comprimento da curva única que os conecta.

Como T é obtida a partir de uma quantidade finita de intervalos fechados, é um espaço métrico compacto. Para quaisquer dois vértices $u, v \in T$, o caminho $T[u, v]$ é bem definido, e o diâmetro de T é:

$$\operatorname{diam}(T) = \max_{u,v \in T} d_T(u, v).$$

Um ponto $v \in T$ é uma *folha* se $T \setminus \{v\}$ é conexo. Um ponto é *ponto de bifurcação* se sua remoção deixa pelo menos três componentes conexas. Denotamos por $L(T)$ o conjunto de folhas de T, e por $Br(T)$ o conjuntos de pontos de bifurcação de T.

O fecho de cada componente de $T \setminus (L(T) \cup Br(T))$ é chamado de *segmento* de T. Todo ponto de $T \setminus Br(T)$ está em um único segmento, e cada segmento possui extremidades contidas em $L(T) \cup Br(T)$.

Seja $T' \subset T$ uma subárvore. Denotamos por $\overline{T}$ o fecho de $T \setminus T'$. Denotamos por $\overline{\text{comp}}(T')$ o conjunto de componentes $\overline{T}$. Uma subárvore $T'' \subset T$ é chamada *galho* se $\overline{T''}$ é conexo e não-vazio. O único ponto $a = \text{anc}(T'') \in T'' \bigcup \overline{T''}$ é a *âncora* de T''. A *profundidade* de cada galho é:

$$\text{dp}(T'') = \max_{v \in T''} d_T(a, v).$$

Esses conceitos permitem medir o quão longe uma subárvore se estende a partir de um determinado ponto de conexão.

2.2 Compacidade e Lemas Estruturais

Uma vantagem desse paradigma métrico é que a família de subárvores formam um espaço compacto sobre a métrica de Hausdorff. Seja $S(T)$ o conjunto de subárvores de T. Equipado com a distância de Hausdorff

$$d_{S(T)}(T_1, T_2) = \max\{\max_{u \in T_1} d_T(u, T_2), \max_{u \in T_2} d_T(u, T_1)\},$$

esse espaço $S(T)$ é compacto (Hausdorff, 1957). Essa compacidade é crucial para os diversos argumentos de minimização usados nos lemas seguintes.

Agora vamos resgatar lemas estruturais chave mostrados por Norin e Turcotte e discutir o seu papel.

Lema 2.2.1 (Limitante do diâmetro). *Seja $T' \subset T$ uma subárvore de uma árvore métrica e suponha que para cada componente $J \in \overline{comp}(T')$ temos que $dp(J) \leq z$. Então,*

$$diam(T) \leq diam(T') + 2z.$$

Esse lema mostra que o diâmetro global de T é controlado pela subárvore central e a profundidade dos galhos restantes. Esse lema será utilizando como limitante dos raios das coberturas futuramente.

Lema 2.2.2 (Desigualdade da profundidade dos galhos). *Seja T', T'' com $T'' \subset T'$ dois galhos de uma árvore métrica T. Então*

$$dp(T') \geq dp(T'') + d_T(anc(T'), anc(T''))$$

Pense em T' como um galho grande que contém T''. A âncora a'' de T'' deve estar a certa distância da âncora a' de T'. Para alcançar o ponto mais profundo de T'' a partir de a', primeiro precisamos percorrer a distância de a' a a'' e então continuar a pelo caminho mais longo dentro de T''. Portanto, a profundidade de T' é pelo menos a soma acima.

Lema 2.2.3. *Para toda árvore métrica T existe uma subárvore $T' \subset T$ e um número $z \geq 0$ tal que :*

1. *T' tem no máximo três folhas;*
2. *toda componente $J \in \overline{comp}(T')$ tem profundidade no máximo z;*
3. *cada folha cde T' é âncora de alguma componente de tamanho exatamente z;*
4. *o tamanho total satisfaz $|T| \geq |T'| + 4z$*

Esse lema nos diz que qualquer árvore, não importa o quão grande ou complicada, esconde um "núcleo"simples com formato de tripé (uma árvore com no máximo 3 folhas). A ideia é que podemos cortar os galhos complexos deixando pra trás um núcleo central T' que é fácil de analizar.

O ponto crucial é que quando cortamos esses galhos nós não perdemos o controle sobre eles: as peças descartadas são todas "rasas", no sentido de que nenhuma delas pode se estender mais profundamente que z. Além disso, garantimos que pelos menos 3 desses pedaços tem a profundidade máxima z. A condição $|T| \geq |T'| + 4z$ nos diz que o tamanho dos galhos cortados representam uma parte substancial do tamanho da árvore.

Em outras palavras, toda árvore pode ser decomposta em uma estrutura central em forma de tripé mais uma coleção de árvores com profundidade limitada. Essa estrutura é enormemente útil. Nos próximos capítulos, quando precisarmos construir coberturas por bolas de vários raios, nós nos preocuparemos apenas com o núcleo central. Podemos lidar com os galhos cortados apenas aumentando os raios da cobertura levemente, já que a a profundidade é sempre limitada por z.

Capítulo 3

Coberturas em árvores métricas: frugalidade e flexibilidade

No Capítulo 2 estudamos a estrutura de árvores métricas, introduzimos noções de decomposição e minimalidade e mostramos como toda árvore pode ser reduzida, a custo controlado, a um núcleo simples com poucos galhos profundos. Esses resultados fornecem a base geométrica sobre a qual passamos agora a estudar coberturas determinísticas por bolas fechadas.

Neste capítulo, fixada uma árvore métrica T, nosso objetivo é cobrir T por bolas de raios prescritos, e em particular como equilibrar o *custo* total (a soma dos raios) com a *flexibilidade* na escolha desses raios. Para isso, formalizamos o conjunto de todas as coberturas possíveis de T e provamos três lemas determinísticos que serão reutilizados, em versão probabilística, no Capítulo 4.

Seja, portanto, T uma árvore métrica com métrica intrínseca d_T e comprimento total $|T|$. Para $v \in T$ e $r \geq 0$, denotamos por $B_T(v, r)$ a *bola fechada* de centro v e raio r, isto é,

$$B_T(v, r) := \{ x \in T : d_T(x, v) \leq r \}.$$

Uma sequência finita $(r_1, \dots, r_m)$ de reais não negativos é uma *cobertura* de T se existem pontos $v_1, \dots, v_m \in T$ tais que

$$T = \bigcup_{i=1}^{m} B_T(v_i, r_i).$$

O conjunto de todas as coberturas de T será denotado por $C(T)$. Nas seções seguintes, analisaremos em detalhe três situações fundamentais: coberturas por uma única bola, coberturas cuja soma de raios domina o tamanho de T. No restante deste capítulo, apresentamos e definimos formalmente os conceitos de l-minimalidade de árvores, frugalidade, e flexibilidade, fundamentais neste trabalho.

3.1 Coberturas de uma única bola

O primeiro lema deste capítulo mostra que toda árvore métrica pode ser coberta por uma única bola de raio igual à metade do diâmetro. Em outras palavras, existe sempre um "centro" da árvore a partir do qual nenhum ponto está a mais do que $\operatorname{diam}(T)/2$ de distância.

Lema 3.1.1 (Cobertura por uma bola, Norin e Turcotte, 2024). *Se T é uma árvore métrica, então existe $y \in T$ tal que*

$$T = B_T\left(y, \frac{\operatorname{diam}(T)}{2}\right).$$

Em particular, $(r) \in \mathcal{C}(T)$ para todo $r \geq \operatorname{diam}(T)/2$.

Demonstração. Seja $D := \operatorname{diam}(T)$ o diâmetro de T. Pela definição de diâmetro e pela compacidade de T, existem pontos $u, v \in T$ tais que $d_T(u, v) = D$.

Considere o caminho (curva simples) $T[u, v]$ entre u e v, de comprimento D, e seja y o ponto médio desse caminho, isto é, o ponto tal que

$$d_T(u, y) = d_T(y, v) = \frac{D}{2}.$$

É suficiente mostrar que todo ponto $w \in T$ satisfaz $d_T(w, y) \leq \frac{D}{2}$. Como w é arbitrário, isso implicará que $T \subseteq B_T\big(y, \frac{D}{2}\big)$, e, como a bola é um subconjunto de T, teremos a igualdade desejada.

Considere a decomposição de T obtida ao remover o ponto y. Como T é uma árvore métrica (conexo e sem ciclos), o conjunto $T \setminus \{y\}$ se decompõe em componentes conexas $C_1, \ldots, C_k$; cada conjunto $C_i \cup \{y\}$ é um ramo de T ancorado em y. Em particular, os pontos u e v pertencem a componentes distintas, pois o caminho $T[u, v]$ passa por y e y é o único ponto comum aos dois "lados" do caminho em relação a y.

Seja agora $w \in T$ arbitrário. Então w pertence a alguma componente C_j de $T \setminus \{y\}$. Pelo menos um dos pontos u ou v não está em C_j, pois u e v já pertencem a componentes diferentes. Sem perda de generalidade, podemos supor que $u \notin C_j$.

Nessa situação, qualquer caminho em T ligando u a w é obrigado a passar por y, pois u e w estão em componentes distintas de $T \setminus \{y\}$. Logo o caminho $T[u, w]$ é a concatenação do caminho $T[u, y]$ com o caminho $T[y, w]$, e portanto

$$d_T(u, w) = d_T(u, y) + d_T(y, w) = \frac{D}{2} + d_T(y, w).$$

Suponha agora, para obter uma contradição, que $d_T(w, y) > \frac{D}{2}$. Substituindo essa desigualdade na expressão acima, obtemos

$$d_T(u, w) = \frac{D}{2} + d_T(y, w) > \frac{D}{2} + \frac{D}{2} = D.$$

Mas isso contradiz a escolha de $D = \operatorname{diam}(T)$, que é, por definição, a maior distância entre dois pontos da árvore. Portanto a suposição $d_T(w, y) > D/2$ é impossível, e concluímos que, para todo $w \in T$ é válido que $d_T(w, y) \leq \frac{D}{2}$. Isso mostra que $T \subseteq B_T\left(y, \frac{D}{2}\right)$, e como a bola é um subconjunto de T, obtemos a igualdade $T = B_T\left(y, \frac{D}{2}\right)$.

Finalmente, se $r \geq D/2 = \text{diam}(T)/2$, então vale que $B_T\left(y, \frac{D}{2}\right) \subseteq B_T(y, r)$, de modo que (r) também é uma cobertura de T, isto é, $(r) \in \mathcal{C}(T)$. Isso completa a demonstração. □

Este lema diz que, em uma árvore métrica T, sempre existe um “centro” y tal que uma única bola de raio $\text{diam}(T)/2$ cobre T. Em termos geométricos, o ponto y é o ponto médio de um par de pontos mais distantes possível em T; nesse sentido, ele desempenha o papel de um centro de massa puramente métrico da árvore. O lema afirma que, apesar da possível complexidade da árvore, não é preciso um raio maior do que metade do diâmetro para alcançá-la por completo.

Do ponto de vista deste trabalho, o Lema 3.1.1 serve como caso base para vários argumentos indutivos. Em particular, no próximo lema veremos que, quando a soma de uma família finita de raios é pelo menos $|T|$, sempre é possível escolher centros de modo que as bolas correspondentes cubram toda a árvore. No extremo em que há apenas um raio disponível, esse raio precisa ser pelo menos da ordem de $\text{diam}(T)/2$, recuperando precisamente a situação tratada aqui.

3.2 Um critério de soma de raios

O próximo resultado formaliza um princípio intuitivo de “tamanho versus custo” para coberturas em árvores métricas: se a soma dos raios disponíveis é pelo menos o comprimento total da árvore, então é sempre possível escolher centros adequados de forma que essas bolas cubram toda a árvore. Esse lema será usado repetidamente quando construirmos coberturas por indução, tanto no contexto determinístico deste capítulo quanto nas construções probabilísticas dos capítulos seguintes.

Lema 3.2.1 (Soma dos raios, NORIN e TURCOTTE, 2024)**.** *Sejam $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Se $|T| \leq \sum_{i=1}^{k} r_i$, então $(r_1, \dots, r_k) \in \mathcal{C}(T)$.*

Demonstração. A prova seque por indução em k.

Suponha, primeiramente, que $k = 1$ e $|T| \leq r_1$. Como já vimos no Lema 3.1.1, para toda árvore métrica T vale $\text{diam}(T) \leq |T|$. Logo $r_1 \geq |T| \geq \text{diam}(T)$ e, em particular, $r_1 \geq \text{diam}(T)/2$. Pelo Lema 3.1.1, existe $y \in T$ tal que $T = B_T\big(y, \text{diam}(T)/2\big) \subseteq B_T(y, r_1)$, de modo que (r_1) é uma cobertura de T, isto é, $(r_1) \in \mathcal{C}(T)$.

Suponha então que $k \geq 2$ e que o enunciado vale para todo inteiro menor que $k' \leq k$, e consideremos $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfazendo $|T| \leq \sum_{i=1}^{k} r_i$.

Se $|T| \leq r_1$, estamos novamente no caso base: como $r_1 \geq |T| \geq \text{diam}(T)$, o Lema 3.1.1 garante que (r_1) cobre T, e então $(r_1, \dots, r_k)$ também é uma cobertura de T.

Portanto, podemos supor que $|T| > r_1$. Agora, pelo Lema **??**, existem árvores T_0 e T_1 que possuem apenas um vértice em comum, e tais que $T = T_0 \cup T_1$ e que T_1 é r_1-minimal, isto é, $r_1 \leq |T_1| \leq 2r_1$ e vale que $\operatorname{diam}(T_1) \leq |T_1| \leq 2r_1$, de onde obtemos $r_1 \geq \frac{\operatorname{diam}(T_1)}{2}$. Pelo Lema 3.1.1 aplicado à árvore T_1, existe um ponto $y \in T_1$ tal que

$$T_1 \subseteq B_T\big(y, \operatorname{diam}(T_1)/2\big) \subseteq B_T(y, r_1),$$

o que mostra que o raio r_1 é suficiente para cobrir toda a subárvore T_1.

Resta então cobrir T_0. Como $T = T_0 \cup T_1$ e T_0 e T_1 intersectam-se em no máximo um ponto, temos $|T_0| = |T| - |T_1| \leq \left(\sum_{i=1}^k r_i\right) - |T_1|$. Usando $|T_1| \geq r_1$, obtemos $|T_0| \leq \left(\sum_{i=1}^k r_i\right) - r_1 = \sum_{i=2}^k r_i$.

Assim, a árvore T_0 satisfaz a hipótese do lema para os $k-1$ raios $r_2, \dots, r_k$; pela hipótese de indução, existe uma escolha de centros em T_0 tal que $(r_2, \dots, r_k) \in \mathcal{C}(T_0)$.

Finalmente, combinando a bola de raio r_1 que cobre T_1 com as bolas de raios $r_2, \dots, r_k$ que cobrem T_0, obtemos uma coleção de bolas cuja união contém $T_0 \cup T_1 = T$. Portanto $(r_1, \dots, r_k) \in \mathcal{C}(T)$x, o que conclui o passo indutivo e a prova do lema. □

Do ponto de vista conceitual, o Lema 3.2.1 estabelece um balanço simples entre *tamanho* e *custo*: o comprimento total $|T|$ da árvore é o "tamanho" do objeto a ser coberto, enquanto a soma $\sum_i r_i$ representa o "custo total" disponível em termos de raios. O lema afirma que, em árvores métricas, não há desperdício estrutural: desde que o custo total em raios seja pelo menos o tamanho da árvore, sempre é possível redistribuir esses raios em posições adequadas de modo a cobrir todo o espaço.

3.3 Coberturas por duas bolas em árvores ℓ-minimais

Nesta seção consideramos árvores métricas que são quase minimais para uma única decomposição. Recordemos rapidamente a noção de árvore ℓ-minimal introduzida no Capítulo 2. Uma árvore métrica T é dita *ℓ-minimal* se $|T| \geq \ell$ e existe uma decomposição $T = T' \cup T''$, em subárvores métricas T' e T'' com interseção em no máximo um ponto, tal que $|T'| \leq \ell$ e $|T''| \leq \ell$.

Além disso, pelo Lema **??** (núcleo de três folhas), como T é ℓ-minimal existe subárvore $T^* \subset T$ tal que T^* tem exatamente três folhas e um parâmetro $z \geq 0$ tal que cada componente J de $T \setminus T^*$ tem profundidade em T no máximo z e $|T| \geq |T^*| + 4z$. Intuitivamente, T^* é um "núcleo de três ramos" e as componentes restantes são galhos de profundidade controlada.

O próximo lema, devido a Norin e Turcotte, diz que é possível cobrir toda árvore ℓ-minimal com duas bolas cujo custo total é rigidamente controlado, mas com grande liberdade na maneira de repartir esse custo entre os dois raios.

Lema 3.3.1 (Cobertura de duas bolas frugal e flexível, NORIN e TURCOTTE, 2024, Lema 3.3).

Seja T uma árvore métrica ℓ-minimal. Então existe um parâmetro

$$0 \ \leq \ a \ \leq \ \min\left\{ \frac{\ell}{2} - \frac{|T|}{4},\ \frac{|T|}{12} \right\}$$

tal que:

(i) *para todo x com $0 \leq x \leq |T|/4 - 3a$, o par de raios*

$$\left(\frac{|T|}{4} - 3a - x,\ \frac{|T|}{4} + a + x \right)$$

forma uma cobertura de T;

(ii) *para todo $x \geq |T|/4 - 3a$, o único raio $\frac{|T|}{4} + a + x$ cobre T, isto é, $(\frac{|T|}{4} + a + x) \in \mathcal{C}(T)$.*

Esboço da prova. A prova completa, com todas as estimativas algébricas, pode ser encontrada em Norin e Turcotte, 2024, Lema 3.3; aqui descrevemos apenas a estrutura geométrica do argumento.

Pelo Lema **??** do núcleo de três folhas no Capítulo 2, existe uma subárvore $T' \subseteq T$ com exatamente três folhas v_1, v_2, v_3 e um parâmetro $z \geq 0$ tal que:

- todas as componentes J de $T \setminus T'$ têm profundidade em T no máximo z;
- o comprimento de T satisfaz $|T| \geq |T'| + 4z$.

Denotemos por v_0 o ponto de bifurcação de T' (o vértice de onde saem os três ramos) e sejam $\ell_i := d_T(v_0, v_i)$, $i = 1, 2, 3$, ordenados de forma que $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \ell_3$. Assim, $|T'| = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ e $\operatorname{diam}(T') = \ell_2 + \ell_3$, e, pelos galhos de profundidade z, obtém-se uma estimativa

$$\operatorname{diam}(T) \ \leq \ \ell_2 + \ell_3 + 2z.$$

Define-se então

$$a := \max\left\{ 0,\ \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} + z - \frac{|T|}{4} \right\}.$$

Usando as desigualdades acima (em particular $|T| \geq |T'| + 4z$ e a ℓ-minimalidade de T), verifica-se que $0 \ \leq \ a \ \leq \ \min\left\{ \frac{\ell}{2} - \frac{|T|}{4},\ \frac{|T|}{12} \right\}$. Com a fixado, consideramos a família de pares de raios parametrizada por $x \geq 0$:

$$r_1(x) := \frac{|T|}{4} - 3a - x, \qquad r_2(x) := \frac{|T|}{4} + a + x.$$

Há dois regimes distintos:

(a) Regime de duas bolas. Se $0 \leq x \leq |T|/4 - 3a$, então $r_1(x) \geq 0$ e $r_2(x)$ é suficientemente grande em termos de z e dos comprimentos ℓ_i para que possamos posicionar os centros p_1 e p_2 no segmento $T[v_2, v_3]$ de forma que:

- as bolas $B_T(p_1, r_1(x) - z)$ e $B_T(p_2, r_2(x) - z)$ cubram todo o núcleo T';

- ao se adicionar a profundidade z aos raios (isto é, considerar $r_1(x)$ e $r_2(x)$), essas bolas se estendam por todos os galhos complementares de $T \setminus T'$.

Isso mostra que, nesse intervalo de x, o par $(r_1(x), r_2(x))$ define uma cobertura de T, o que prova o item (i).

(b) Regime de uma bola. Se $x \geq |T|/4 - 3a$, então $r_2(x)$ cresce e se torna grande o bastante para cobrir T sozinho. Mais precisamente, o limite inferior para x implica

$$r_2(x) = \frac{|T|}{4} + a + x \;\geq\; \frac{\ell_2 + \ell_3}{2} + z \;\geq\; \frac{\operatorname{diam}(T)}{2},$$

de modo que o Lema 3.1.1 garante que o raio $r_2(x)$ é suficiente para cobrir toda a árvore T. Assim, no regime $x \geq |T|/4 - 3a$, o par degenera em uma única bola, como afirma o item (ii).

Os detalhes algébricos que ligam as desigualdades acima às hipóteses de ℓ-minimalidade podem ser encontrados em Norin e Turcotte, 2024, Lema 3.3, e não são necessários para o uso do lema ao longo desta tese. □

Frugalidade e flexibilidade. O Lema 3.3.1 é importante não apenas pelo fato de garantir uma cobertura por duas bolas, mas pela maneira como controla simultaneamente o *custo total* e a *liberdade de escolha* dos raios.

Primeiro, notemos que a soma dos raios é independente de x:

$$r_1(x) + r_2(x) = \left(\frac{|T|}{4} - 3a - x\right) + \left(\frac{|T|}{4} + a + x\right) = \frac{|T|}{2} - 2a.$$

Esse valor permanece fixo em toda a família de pares $(r_1(x), r_2(x))$ que realmente utilizam duas bolas (regime $0 \leq x \leq |T|/4 - 3a$). Dizemos que a cobertura é *frugal* porque o custo total em raios é rigidamente controlado: independentemente de como repartimos esse custo entre a primeira e a segunda bola, a soma $r_1(x) + r_2(x)$ nunca ultrapassa $\frac{|T|}{2}$, salvo pela pequena assimetria de $2a$.

Por outro lado, a função

$$x \longmapsto (r_1(x), r_2(x))$$

é afim em x e parametriza um segmento de reta no plano (r_1, r_2). À medida que x varia em um intervalo real contínuo, percorremos um intervalo continuo de pares de raios admissíveis que cobrem a árvore no regime de duas bolas. Em cada coordenada, isso se traduz em um intervalo contíguo de comprimentos possíveis para r_1 e para r_2. A liberdade de deslocar x sem perder a propriedade de cobertura é o que chamamos de *flexibilidade*: temos um continuum de partições viáveis de um custo total praticamente fixo.

Essa combinação de frugalidade (controle de custo) e flexibilidade (escolhas contínuas de raios) é a principal razão pela qual o Lema 3.3.1 será útil nos capítulos seguintes. Na construção probabilística, ele permite parametrizar coberturas determinísticas com raios variando em intervalos, o que é essencial para construir coberturas aleatórias com boas propriedades de uniformidade ao longo de toda a árvore.

3.4 Síntese e conexão com o Capítulo 4

Os resultados deste capítulo fornecem a base determinística sobre a qual será construída a análise probabilística do Capítulo 4. O Lema 3.1.1 mostra que, em qualquer árvore métrica, uma única bola de raio $\mathrm{diam}(T)/2$ é suficiente para cobrir toda a árvore, estabelecendo um caso extremo de cobertura "concentrada". O Lema 3.2.1 complementa essa visão com um princípio de tipo "tamanho versus custo": sempre que a soma dos raios é pelo menos $|T|$, é possível escolher centros de modo que a união das bolas correspondespondentes cubra toda a árvore. Finalmente, o Lema 3.3.1 refina esse quadro em árvores ℓ-minimais, exibindo uma família contínua de coberturas por duas bolas que, ao mesmo tempo, mantém o custo total rigidamente controlado e admite grande flexibilidade na repartição dos raios.

No Capítulo 4, essas ideias serão "aleatorizadas". Em vez de trabalharmos apenas com uma cobertura fixa $(r_1, \dots, r_m) \in \mathcal{C}(T)$, consideraremos distribuições de probabilidade ν sobre o espaço de todas as coberturas de T e introduziremos a *expectativa de medida* E_ν, que registra, em média, quantos raios caem em cada intervalo de comprimentos. A partir de E_ν, definiremos o *momento* $m(E_\nu)$, que mede a soma esperada dos raios em uma cobertura aleatória, e a classe de medidas (r, δ)-controladas, que formaliza um tipo de quase-uniformidade essencial para o argumento. Os lemas determinísticos deste capítulo reaparecerão então sob a forma de lemas de colagem e construções paramétricas, permitindo passar de coberturas frugais e flexíveis em núcleos locais a coberturas aleatórias bem comportadas em toda a árvore. Essa passagem é o primeiro passo na ponte entre a teoria determinística de coberturas e o arcabouço probabilístico que culminará no Teorema 5.1.1.

Capítulo 4

Coberturas aleatórias, expectativa de medida e momento

Até este ponto, trabalhamos apenas com coberturas determinísticas de uma árvore métrica T. Nesses casos, escolhemos explicitamente uma coleção de bolas fechadas, cada uma com um centro e um raio específicos, cuja união cobre todos os pontos da árvore. Para estudar o problema do número de queima de maneira mais flexível e robusta, é útil permitir aleatoriedade no processo de seleção dos raios. Em vez de trabalharmos sempre com a mesma cobertura, passamos a considerar um processo que escolhe aleatoriamente entre diferentes coberturas possíveis, cada uma com certa probabilidade. Esta é a ideia central de uma *cobertura aleatória*.

4.1 Coberturas aleatórias e expectativa de medida

Formalmente, seja $C(T)$ o conjunto de todas as coberturas finitas de T. Cada elemento

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in C(T)$$

representa uma cobertura possível, dada pela sequência de raios das bolas que cobrem a árvore. O número de bolas m pode variar: uma cobertura pode usar uma única bola, outra pode usar quatro, e assim por diante.

Uma *cobertura aleatória* é uma regra probabilística que nos diz com que probabilidade escolhemos cada cobertura em $C(T)$. Equivalentemente, é uma distribuição de probabilidade ν em $C(T)$, que atribui, a cada cobertura $r \in C(T)$, um peso $\nu(r)$ representando a probabilidade de o processo produzir exatamente aquela sequência de raios. Em termos intuitivos, ν nos diz quais coberturas são mais frequentes e quais são raras.

Exemplo 1. *Suponha que T seja uma árvore métrica que pode ser coberta de duas maneiras:*

- *por uma única bola de raio* 5*, representada pela sequência* (5)*;*
- *por duas bolas de raio* 2*, representadas pela sequência* $(2, 2)$.

Definimos uma distribuição de probabilidade ν em $C(T)$ estabelecendo

$$\nu((5)) = \tfrac{1}{2} \quad e \quad \nu((2,2)) = \tfrac{1}{2},$$

e atribuímos probabilidade 0 *a todas as outras coberturas. Nesse caso, ao executar o experimento, há* 50% *de chance de obtermos a cobertura* (5) *e* 50% *de chance de obtermos a cobertura* (2, 2). *Dizemos que ν é uma distribuição de coberturas aleatórias em $C(T)$.*

Uma vez que podemos escolher coberturas ao acaso, surge naturalmente a pergunta: *em média*, como os raios estão distribuídos? Por exemplo, qual é o número esperado de raios cujo comprimento está entre 0 e 3? Para formular essa questão de maneira precisa, introduzimos uma função de contagem simples.

Fixe um intervalo $B \subseteq \mathbb{R}$ (por exemplo, $B = [0, 3]$ como no exemplo acima). Dada uma cobertura $r = (r_1, \ldots, r_m)$ com $r_i \in \mathbb{R}$ para $i \in [m]$, definimos

$$\#(B, r) = \left|\{\, i \,:\, r_i \in B \,\}\right|$$

como o número de raios de r que pertencem a B. Por exemplo, se $r = (1, 2, 5)$ e $B = [0, 3]$, então $\#(B, r) = 2$.

Quando permitimos aleatoriedade, a cobertura r é escolhida de acordo com uma distribuição de probabilidade ν em $C(T)$. Assim, $\#(B, r)$ se torna uma variável aleatória: seu valor depende do resultado do experimento. Se quisermos saber *em média* quantos raios caem em B, precisamos calcular o valor esperado de $\#(B, r)$, isto é, a média de $\#(B, r)$ sobre todas as coberturas possíveis, ponderadas por suas probabilidades.

Definição 4.1.1. *Seja ν uma distribuição de probabilidade em $C(T)$. A* expectativa de medida *associada a ν é a aplicação*

$$E_\nu : \{\textit{intervalos de}\, \mathbb{R}_+\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

definida, para cada intervalo $B \subset \mathbb{R}_+$, por

$$E_\nu(B) = \mathbb{E}_\nu[\#(B, r)].$$

Na notação acima, $\mathbb{E}_\nu$ indica que o valor esperado é calculado no espaço de probabilidade cujo espaço amostral é $C(T)$, munido da distribuição ν, isto é, quando a cobertura r é escolhida aleatoriamente de acordo com ν. Em uma notação mais compacta, podemos escrever

$$E_\nu(B) = \int_{C(T)} \#(B, r)\, d\nu(r).$$

Para os propósitos deste trabalho, é suficiente interpretar $E_\nu(B)$ como

"o número esperado de raios que pertencem a B em uma cobertura escolhida aleatoriamente segundo ν".

Retomemos o exemplo anterior. Suponha que temos 50% de chance de escolher a cobertura (5) e 50% de chance de escolher a cobertura (2, 2). Consideremos os intervalos $B_1 = [0, 3]$ e $B_2 = [3, 6]$.

- Em $B_1 = [0, 3]$, a cobertura (5) possui 0 raios, enquanto (2, 2) possui 2 raios. Logo,

$$E_\nu([0,3]) = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

- Em $B_2 = [3, 6]$, a cobertura (5) possui 1 raio, enquanto (2, 2) possui 0 raios. Portanto,

$$E_\nu([3,6]) = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 = \tfrac{1}{2}.$$

Assim, a expectativa de medida nos diz que, em média, há 1 raio entre 0 e 3 e 0,5 raios entre 3 e 6. Esses valores não precisam ser inteiros, pois representam valores esperados.

Uma situação particularmente simples ocorre quando a distribuição de probabilidade ν está concentrada em coberturas de tamanho fixo m, isto é, quando a probabilidade de selecionar qualquer cobertura com número diferente de m raios é zero.

Mais precisamente, denotemos por

$$C_m(T) = \Big\{ \, r = (r_1, \dots, r_m) \in C(T) \,:\, r \text{ tem exatamente } m \text{ raios} \, \Big\}$$

o subconjunto de $C(T)$ formado apenas pelas coberturas com m raios. Dizemos que ν tem *suporte* $C_m(T)$ se $\nu(C_m(T)) = 1$, isto é, se $\nu(r) = 0$ para toda cobertura $r \in C(T) \setminus C_m(T)$. Nesse caso, a variável aleatória "número de raios" é constante (vale sempre m), mas os comprimentos individuais dos raios podem variar.

Dada uma distribuição de probabilidade ν e $i \in \{1, \dots, m\}$, definimos a medida de probabilidade ν_i na reta real não negativa como a *distribuição do i-ésimo raio.* Formalmente, para cada intervalo $B \subseteq \mathbb{R}_+$, definimos

$$\nu_i(B) = \nu\big(\{ \, r = (r_1, \dots, r_m) \in C_m(T) \,:\, r_i \in B \, \}\big).$$

Em palavras, $\nu_i(B)$ é a probabilidade de o i-ésimo raio pertencer a B quando a cobertura r é escolhida aleatoriamente segundo ν.

Lema 4.1.2. *Sejam T uma árvore métrica e $m \in \mathbb{N}^+$. Se ν é uma medida de probabilidade em $C(T)$ com suporte $C_m(T)$ e E_ν é a expectativa de medida associada, então, para todo intervalo $B \subseteq \mathbb{R}_+$, vale*

$$E_\nu(B) = \nu_1(B) + \cdots + \nu_m(B).$$

Em notação compacta, podemos escrever

$$E_\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_m.$$

Demonstração. Como ν é suportada em $C_m(T)$, podemos escrever o valor esperado $E_\nu(B) = \mathbb{E}_\nu[\#(B, r)]$ como uma soma finita sobre $C_m(T)$:

$$E_\nu(B) = \sum_{r \in C_m(T)} \#(B, r) \cdot \nu(r).$$

Por definição, temos que $\#(B, r) = \big|\{ \, i \in [m] \,:\, r_i \in B \, \}\big|$. Podemos reescrever essa quantidade como uma soma de indicadores:

$$\#(B, r) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{\{r_i \in B\}},$$

onde $\mathbf{1}_{\{r_i \in B\}}$ vale 1 se $r_i \in B$ e 0 caso contrário. Substituindo na expressão de $E_\nu(B)$, obtemos

$$E_\nu(B) = \sum_{r \in C_m(T)} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{\{r_i \in B\}} \right) \nu(r).$$

Como estamos lidando com somas finitas, podemos trocar a ordem das somas:

$$E_\nu(B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{r \in C_m(T)} \mathbf{1}_{\{r_i \in B\}} \nu(r).$$

Para cada i, a soma interna é exatamente a probabilidade de o i-ésimo raio pertencer a B, isto é,

$$\sum_{r \in C_m(T)} \mathbf{1}_{\{r_i \in B\}} \nu(r) = \nu\big(\{\, r \in C_m(T) \;:\; r_i \in B \,\}\big) = \nu_i(B).$$

Portanto,

$$E_\nu(B) = \sum_{i=1}^{m} \nu_i(B),$$

como queríamos demonstrar. □

O Lema 4.1.2 formaliza a ideia de que E_ν reflete o comportamento combinado de todos os raios, sem distinguir de qual bola cada raio origina-se. A medida E_ν pode ser vista como a soma das distribuições marginais $\nu_1, \dots, \nu_m$: para cada intervalo B, o valor $E_\nu(B)$ é simplesmente a soma das probabilidades de que cada coordenada r_i caia em B. Dessa forma, E_ν é uma forma compacta de descrever como a "massa total" de raios se distribui ao longo dos possíveis comprimentos em todas as coberturas aleatórias suportadas em $C_m(T)$.

Em resumo, a expectativa de medida E_ν transforma uma coleção de coberturas aleatórias em um único objeto que nos diz quanto cada faixa de valores de raio é usada, em média. Essa noção é fundamental porque nos permite tirar conclusões sobre o comportamento médio das coberturas, em vez de analisar uma única realização específica. Nas seções seguintes, veremos como extrair de E_ν um parâmetro escalar, o *momento*, e como impor sobre E_ν uma condição de quase uniformidade via medidas (r, δ)-controladas. Esses dois conceitos servirão de ponte entre os argumentos probabilísticos e os limitantes determinísticos do problema do número de queima.

4.2 O momento da expectativa de medida

A expectativa de medida E_ν descreve, para cada intervalo de comprimentos, quantos raios são utilizados em média por uma cobertura aleatória escolhida segundo ν. Em muitos argumentos, porém, é conveniente resumir essa informação em um único número que quantifique o “tamanho total” dos raios usados. Seguindo (Norin & Turcotte, 2024, Seção 3), introduzimos para isso o *momento da expectativa de medida*, denotado por $m(E_\nu)$.

A ideia é que esse momento deve levar em conta simultaneamente *quantos* raios são usados e quão *grandes* eles são. Raios longos contribuem mais para o alcance da cobertura do que raios curtos, e o momento deve refletir essa diferença.

Definição 4.2.1. *Seja ν uma distribuição de probabilidade em $C(T)$ e seja E_ν a expectativa de medida associada. O* momento de E_ν*, seguindo (Norin & Turcotte, 2024), é o número real definido por*

$$m(E_\nu) = 2\int_0^\infty x\, dE_\nu(x).$$

Embora a notação integral possa parecer abstrata, seu significado é direto. A medida E_ν nos diz quantos raios, em média, caem em cada intervalo da reta real positiva. Multiplicar por x e integrar corresponde a *somar* todas essas contribuições, ponderando cada faixa de comprimentos pelo próprio valor do raio. Em termos heurísticos, podemos pensar nessa integral como a versão contínua da soma discreta

$$m(E_\nu) \approx 2\sum_i x_i\, E_\nu([x_i, x_{i+1}]),$$

na qual $E_\nu([x_i, x_{i+1}])$ é o número esperado de raios com comprimento no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

O fator 2 na definição é uma escolha de normalização adotada em (Norin & Turcotte, 2024) para simplificar a forma dos limitantes analíticos que aparecem na prova do Teorema 4.1. Do ponto de vista probabilístico, a informação essencial está no valor

$$\int_0^\infty x\, dE_\nu(x),$$

que captura a soma total esperada dos comprimentos dos raios.

No caso em que ν tem suporte em coberturas de tamanho fixo m (como discutido na seção anterior), é possível reescrever $m(E_\nu)$ em termos da soma dos raios da cobertura aleatória.

Proposição 1. *Suponha que ν seja uma medida de probabilidade em $C(T)$ suportada em $C_m(T)$ e seja $(r_1, \dots, r_m)$ uma sequência de raios da cobertura escolhida aleatoriamente segundo ν. Então*

$$m(E_\nu) = 2\,\mathbb{E}_\nu[r_1 + \cdots + r_m].$$

Demonstração. Pelo Lema 4.1.2, para cada intervalo $B \subseteq \mathbb{R}_+$, temos $E_\nu(B) = \nu_1(B) + \cdots + \nu_m(B)$, onde ν_i é a distribuição do i-ésimo raio. Substituindo na definição de $m(E_\nu)$,

$$m(E_\nu) = 2\int_0^\infty x\, dE_\nu(x) = 2\int_0^\infty x\, d\big(\nu_1 + \cdots + \nu_m\big)(x).$$

Como a integral é linear, obtemos $m(E_\nu) = 2\sum_{i=1}^m \int_0^\infty x\, d\nu_i(x)$. Por definição temos que

$\int_0^\infty x\, d\nu_i(x) = \mathbb{E}_\nu[r_i]$. Logo,

$$m(E_\nu) = 2\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_\nu[r_i] = 2\,\mathbb{E}_\nu[r_1 + \cdots + r_m].$$

$\square$

A Proposição 1 justifica a interpretação de $m(E_\nu)$ como *o dobro da soma esperada dos raios* em uma cobertura aleatória. Em particular, quanto maiores (ou mais numerosos) forem os raios utilizados em média, maior será o momento; quanto menores e mais localizados forem os raios, menor será $m(E_\nu)$.

Retomemos a distribuição distribuição do Exemplo 1

$$\nu((5)) = 0{,}5, \qquad \nu((2,2)) = 0{,}5.$$

A soma total dos raios em cada caso é dada por

$$\text{soma em } (5) = 5, \qquad \text{soma em } (2,2) = 2 + 2 = 4,$$

de modo que

$$\mathbb{E}_\nu[r_1 + \cdots + r_m] = 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 4 = 4{,}5.$$

Pela Proposição 1,

$$m(E_\nu) = 2 \times 4{,}5 = 9.$$

Esse valor mede a “massa total” de raios esperada em uma cobertura típica da distribuição ν.

Ao longo de (Norin & Turcotte, 2024), o momento $m(E_\nu)$ é o parâmetro que aparece nos principais limitantes analíticos: toda a construção de coberturas aleatórias é guiada por estimativas do tipo $m(E_\nu) \leq c\,|T|$ para constantes c adequadas. Neste trabalho, seguiremos essa mesma ideia: controlar o momento é controlar quanta “energia de cobertura” está disponível para espalhar o fogo ao longo da árvore métrica, preparando o terreno para as desigualdades de concentração que serão usadas na discretização final.

4.3 Medidas (r, δ)-controladas

A seção anterior mostrou como o momento $m(E_\nu)$ quantifica a soma esperada de todos os raios em uma cobertura aleatória. No entanto, esse controle é global: duas distribuições muito diferentes podem ter o mesmo momento, por exemplo uma em que todos os raios são próximos de r e outra em que metade é muito pequena e metade é muito grande. Para construir o argumento probabilístico que leva ao Teorema 5.1.1, precisamos garantir não apenas que a soma total dos raios esteja controlada, mas também que eles não se concentrem de maneira excessiva em uma pequena faixa de comprimentos.

A noção de *medida (r, δ)-controlada* formaliza esse requisito de quase uniformidade. De forma intuitiva, uma medida (r, δ)-controlada é aquela que pode ser escrita como uma combinação convexa de medidas uniformes em intervalos que sempre se estendem até r e têm comprimento pelo menos δr.

Seja T uma árvore métrica e seja $C(T)$ o espaço de todas as coberturas finitas de T por bolas fechadas, como acima. Seja ν uma medida de probabilidade em $C(T)$ e seja E_ν a expectativa de medida associada. Denotamos por $U[a, r]$ a medida de probabilidade uniforme no intervalo real $[a, r]$.

Definição 4.3.1. *Dizemos que ν (ou, de maneira equivalente, E_ν) é (r, δ)-*controlada *se existem coeficientes não negativos*

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$$

e parâmetros

$$a_1, \dots, a_k \in [0, (1-\delta)r],$$

tais que

$$E_\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, U[a_i, r].$$

Essa decomposição garante duas propriedades importantes:

- **Suporte em** $[0, r]$**.** Como cada $U[a_i, r]$ é suportada em $[a_i, r] \subseteq [0, r]$, todas as massas de E_ν estão concentradas em raios entre 0 e r. Em particular, não há raios maiores que r.
- δ**-controle.** Para cada i, o intervalo $[a_i, r]$ tem comprimento

  $$r - a_i \;\geq\; r - (1-\delta)r = \delta r,$$

  isto é, cada componente uniforme se estende por um subintervalo de tamanho pelo menos δr. Isso impede que a massa se concentre em intervalos demasiado curtos.

Em termos intuitivos, cada termo $\alpha_i U[a_i, r]$ representa um "nível" da distribuição: com peso α_i, a medida se comporta como se os raios fossem escolhidos uniformemente em $[a_i, r]$. Como todos esses intervalos terminam em r e têm comprimento mínimo δr, a decomposição impede que E_ν apresente picos muito localizados perto de um único comprimento de raio.

Nas próximas seções deste capítulo (não incluídas aqui), veremos que:

- medidas (r, δ)-controladas continuam (r, δ)-controladas sob operações naturais, como a concatenação de coberturas e certas misturas convexas (os chamados *lemas de colagem*);
- a construção recursiva da prova do Teorema 4.1 produz, a cada etapa, distribuições (r, δ)-controladas com momento limitado;
- esse controle simultâneo de momento e de quase uniformidade é o que permite, mais adiante, aplicar desigualdades de concentração e obter a discretização final em

termos da sequência $(1, 2, \dots, k)$.

Dessa forma, as medidas (r, δ)-controladas ocupam um papel intermediário fundamental: são suficientemente rígidas para garantir uniformidade analítica, mas ainda flexíveis o bastante para serem estáveis sob as operações probabilísticas necessárias na prova de Norin e Turcotte.

4.4 Lemas de colagem para medidas (r, δ)-controladas

O objetivo desta seção é mostrar que medidas (r, δ)-controladas mantém a propriedade de (r, δ)-controladas ao serem parametrizadas por um intervalo, concatenadas ou combinadas de forma convexa. Esses resultados aparecem como os Lemas 4.2, 4.3 e 4.4 em Norin e Turcotte, 2024 e são a base técnica para a prova do Teorema 5.1.1, a versão fracionária do Teorema 7.1.1

Recordamos também a noção de coberturas "boas" em termos da soma dos raios. Para $l \geq 0$, dizemos que uma cobertura $r = (r_1, \dots, r_m)$ de T é *l-boa* se

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \leq |T| + l,$$

isto é, se a soma dos raios excede o comprimento de T em, no máximo, l. Denotamos por $C(T, l) \subseteq C(T)$ o subconjunto de coberturas l-boas. No caso $l = 0$, as coberturas de $C(T, 0)$ são exatamente aquelas cuja soma dos raios é, no máximo, $|T|$.

4.4.1 Lema de colagem I: operações básicas em $C(T, l)$

O primeiro resultado (Lema 4.2 em Norin e Turcotte, 2024) coleta três operações fundamentais:

(i) parametrização por um intervalo,

(ii) concatenação de coberturas em uma decomposição de T,

(iii) combinação convexa de distribuições;

Em todos os casos, a conclusão é que a expectativa de medida se comporta exatamente da forma esperada, e que a propriedade de ser (r, δ)-controlada é preservada.

Lema 4.4.1 (Norin e Turcotte, 2024). *Seja T uma árvore métrica.*

1. *Sejam $f_1, \dots, f_m : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ funções afins tais que, para todo $x \in [0, 1]$, o m-tupla*

$$\big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big)$$

é uma cobertura de T. Para cada $i \in [m]$, defina

$$a_i = \min\{f_i(0), f_i(1)\} \quad e \quad b_i = \max\{f_i(0), f_i(1)\},$$

e seja

$$l = \max\Big\{ \sum_{i=1}^{m} f_i(0),\ \sum_{i=1}^{m} f_i(1) \Big\} - |T|.$$

Então existe uma medida de probabilidade ν *em* $C(T, l)$ *tal que*

$$E_\nu \ = \ \sum_{i=1}^{m} U[a_i, b_i]. \tag{4.1}$$

2. *Seja* $\{T_1, \dots, T_k\}$ *uma decomposição de* T *(isto é,* T *é a união disjunta, a menos de fronteiras, das subárvores* T_i*). Sejam* $r, \delta, l_1, \dots, l_k \geq 0$ *tais que, para cada* $1 \leq i \leq k$*, exista uma medida de probabilidade* ν_i *em* $C(T_i, l_i)$ *que seja* (r, δ)*-controlada. Então existe uma medida de probabilidade* ν *em* $C(T, \sum_{i=1}^{k} l_i)$*, também* (r, δ)*-controlada, tal que*

$$m(E_\nu) \ = \ \sum_{i=1}^{k} m(E_{\nu_i}). \tag{4.2}$$

3. *Seja* $l \geq 0$*. Sejam* $\nu_0, \dots, \nu_k$ *medidas de probabilidade em* $C(T, l)$ *e* $p_0, \dots, p_k \geq 0$ *tais que* $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$*. Então existe uma medida de probabilidade* ν *em* $C(T, l)$ *tal que*

$$E_\nu \ = \ \sum_{i=0}^{k} p_i \, E_{\nu_i}. \tag{4.3}$$

Em termos informais, a parte 1 afirma que, se temos uma família contínua de coberturas indexadas por $x \in [0, 1]$, em que cada raio i varia de forma afim entre dois extremos $f_i(0)$ e $f_i(1)$, então escolher um valor de x uniformemente em $[0, 1]$ produz uma distribuição de coberturas cuja expectativa de medida é a soma das medidas uniformes $U[a_i, b_i]$ nos intervalos percorridos por cada raio. A parte 2 permite colar coberturas independentes de subárvores T_i em uma cobertura de T inteiro, preservando o controle (r, δ) e somando os momentos. Finalmente, a parte 3 diz que podemos tirar uma mistura convexa de distribuições já construídas, e a expectativa de medida resultante é simplesmente a combinação convexa das expectativas.

Demonstração. Apresentamos uma prova detalhada da parte 1 e, em seguida, discutimos brevemente as partes 2 e 3.

Parte 1. Definimos uma aplicação

$$F \ : \ [0, 1] \longrightarrow C(T, l), \qquad F(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big).$$

Por hipótese, para cada $x \in [0, 1]$ o vetor $F(x)$ é uma cobertura de T. Além disso, como cada f_i é afim, a função F é contínua, logo mensurável.

Equipamos $[0, 1]$ com a medida uniforme $U[0, 1]$, isto é, escolhemos um ponto x em $[0, 1]$ "completamente ao acaso", de modo que todos os subintervalos de mesmo comprimento tenham a mesma probabilidade de serem sorteados. Em seguida, usamos a aplicação

$$F : [0,1] \to C(T,l), \qquad F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

para transformar esse número aleatório x em uma cobertura aleatória $F(x)$ de T.

De maneira intuitiva, o procedimento é:

1. sorteamos $x \in [0,1]$ uniformemente (usando $U[0,1]$);
2. calculamos os raios $f_1(x), \dots, f_m(x)$;
3. obtemos assim uma cobertura $F(x) \in C(T,l)$.

A distribuição de probabilidade ν em $C(T,l)$ é precisamente a lei desse experimento: para cada subconjunto $B \subseteq C(T,l)$, o valor $\nu(B)$ é a probabilidade de o procedimento acima produzir uma cobertura que pertença a B.

Formalmente, dizemos que ν é a *imagem* de $U[0,1]$ pela aplicação F e escrevemos

$$\nu(B) = U[0,1]\big(F^{-1}(B)\big)$$

para todo conjunto mensurável $B \subseteq C(T,l)$. Aqui, $F^{-1}(B)$ é o conjunto de todos os pontos $x \in [0,1]$ tais que $F(x) \in B$. Em palavras: $\nu(B)$ é a probabilidade de, ao escolher x uniformemente em $[0,1]$ e aplicar F, cairmos em alguma cobertura de B.

Como $U[0,1]$ é uma medida de probabilidade em $[0,1]$ e F é apenas uma regra determinística que transforma pontos de $[0,1]$ em coberturas de T, a medida ν obtida dessa forma é automaticamente uma medida de probabilidade em $C(T,l)$.

Para entender E_ν de forma mais concreta, fixemos um intervalo $B \subseteq \mathbb{R}_+$. Lembrando a definição, $E_\nu(B)$ é o *número esperado de raios que caem em B* quando escolhemos uma cobertura aleatória segundo ν.

Dado $x \in [0,1]$, a cobertura correspondente é

$$F(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big),$$

de modo que o número de raios de $F(x)$ em B pode ser escrito como

$$\#(B, F(x)) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{\{f_i(x) \in B\}},$$

onde $\mathbf{1}_{\{f_i(x) \in B\}}$ vale 1 se $f_i(x) \in B$ e 0 caso contrário. Tomando valor esperado em relação à escolha uniforme de $x \in [0,1]$, obtemos

$$E_\nu(B) = \mathbb{E}_\nu[\#(B,r)] = \mathbb{E}_{x \sim U[0,1]}\left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{1}_{\{f_i(x) \in B\}}\right].$$

Como a soma é finita, podemos trocar ordem de soma e esperança:

$$E_\nu(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_{x\sim U[0,1]}\left[\mathbf{1}_{\{f_i(x)\in B\}}\right].$$

Mas a esperança de um indicador é exatamente a probabilidade do evento correspondente. Logo,

$$\mathbb{E}_{x\sim U[0,1]}\left[\mathbf{1}_{\{f_i(x)\in B\}}\right] = \mathbb{P}_{x\sim U[0,1]}(f_i(x) \in B).$$

Denotando por ν_i a distribuição do i-ésimo raio (isto é, a lei de $f_i(x)$ quando x é escolhido uniformemente em $[0, 1]$), temos

$$\mathbb{P}_{x\sim U[0,1]}(f_i(x) \in B) = \nu_i(B).$$

Concluímos então que

$$E_\nu(B) = \sum_{i=1}^{m} \nu_i(B) \quad \text{para todo intervalo } B \subseteq \mathbb{R}_+,$$

o que em notação de medidas se escreve como

$$E_\nu = \sum_{i=1}^{m} \nu_i. \tag{4.4}$$

Ou seja, a expectativa de medida é simplesmente a soma das distribuições marginais dos raios.

Agora, observemos o formato de cada ν_i. A função $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ é afim e estritamente monótona (ou constante) em $[0, 1]$, e sua imagem é exatamente o intervalo $[a_i, b_i]$ definido anteriormente. Quando escolhemos x uniformemente em $[0, 1]$ e aplicamos f_i, o resultado percorre $[a_i, b_i]$ de maneira uniforme: intervalos de mesmo comprimento em $[a_i, b_i]$ correspondem a intervalos de mesmo comprimento em $[0, 1]$ via f_i^{-1}.

Em outras palavras, a *imagem* da medida uniforme $U[0, 1]$ pela função afim f_i é a medida uniforme em $[a_i, b_i]$. Escrevendo isso em termos das medidas, temos

$$\nu_i = U[0, 1] \circ f_i^{-1} = U[a_i, b_i]$$

para todo $i \in [m]$.

Substituindo essa expressão em (4.4), obtemos

$$E_\nu = \sum_{i=1}^{m} U[a_i, b_i],$$

que é exatamente a identidade desejada em (4.1).

Por fim, verifiquemos a condição de l-bondade. Pelas hipóteses do lema, a soma dos raios em $F(0)$ e em $F(1)$ é, em cada caso, no máximo $|T| + l$. Como cada f_i é afim, a função

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$$

é também afim em $[0, 1]$ e, portanto, seus valores intermediários nunca ultrapassam o máximo entre os valores nos extremos $x = 0$ e $x = 1$. Assim, para todo $x \in [0, 1]$, vale

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \;\leq\; \max\Big\{ \sum_{i=1}^{m} f_i(0),\; \sum_{i=1}^{m} f_i(1) \Big\} \;\leq\; |T| + l.$$

Isso mostra que toda cobertura $F(x)$ tem soma de raios no máximo $|T| + l$, isto é, $F(x) \in C(T, l)$ para todo $x \in [0, 1]$. Como ν é construída a partir dessas coberturas, concluímos que ν é de fato uma medida de probabilidade em $C(T, l)$, o que encerra a demonstração da parte *1* do Lema 4.4.1.

Parte 2. Agora, suponha que T seja a união de subárvores $T_1, \ldots, T_k$ que formam uma decomposição. Para cada i, temos uma medida de probabilidade ν_i em $C(T_i, l_i)$, (r, δ)-controlada, isto é, com

$$E_{\nu_i} = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j}\, U[a_{i,j}, r] \quad \text{e} \quad a_{i,j} \in [0, (1 - \delta)r].$$

Consideramos agora o produto de todas essas distribuições,

$$\mu = \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_k,$$

que é uma medida de probabilidade no produto $C(T_1, l_1) \times \cdots \times C(T_k, l_k)$. Um ponto típico desse produto é um k-tuplo $(r^{(1)}, \ldots, r^{(k)})$, em que cada $r^{(i)}$ é uma cobertura de T_i.

Definimos uma aplicação

$$R \;:\; C(T_1, l_1) \times \cdots \times C(T_k, l_k) \longrightarrow C\Big(T, \sum_{i=1}^{k} l_i\Big),$$

que simplesmente concatena os vetores de raios:

$$R\big(r^{(1)}, \ldots, r^{(k)}\big) = (r^{(1)}_1, \ldots, r^{(1)}_{m_1}, r^{(2)}_1, \ldots, r^{(k)}_{m_k}).$$

Essa concatenação é uma cobertura de T, porque os centros escolhidos nas T_i cobrem cada subárvore e, portanto, a união delas cobre todo T. Além disso, a soma total dos raios excede $|T|$ em, no máximo, $\sum l_i$, logo a imagem está em $C(T, \sum l_i)$.

Tomamos então ν como a imagem de μ por R. Na prática, isso significa: escolhemos independentemente uma cobertura de cada T_i segundo ν_i, e em seguida colamos todas as bolas obtidas numa única cobertura de T. A expectativa de medida se soma:

$$E_\nu = \sum_{i=1}^{k} E_{\nu_i},$$

pois cada raio que aparece em alguma T_i entra exatamente uma vez na contagem total. Aplicando a definição do momento,

$$m(E_\nu) = \sum_{i=1}^{k} m(E_{\nu_i}),$$

o que é exatamente (4.2). Como cada E_{ν_i} é uma combinação de medidas $U[a_{i,j}, r]$ com $a_{i,j} \leq (1-\delta)r$, a soma E_ν também é, logo ν é (r, δ)-controlada.

Parte (c). Nesta parte, partimos de medidas de probabilidade $\nu_0, \ldots, \nu_k$ em $C(T, l)$ e pesos $p_0, \ldots, p_k$ com soma 1. Definimos diretamente

$$\nu = \sum_{i=0}^{k} p_i \, \nu_i.$$

Isto é, para escolher uma cobertura segundo ν, primeiro escolhemos um índice I com $\mathbb{P}(I = i) = p_i$ e, em seguida, escolhemos uma cobertura segundo ν_I. A expectativa de medida satisfaz

$$E_\nu = \sum_{i=0}^{k} p_i E_{\nu_i}$$

por linearidade do valor esperado, o que é precisamente (4.3). Como todas as coberturas de suporte das ν_i são l-boas, o mesmo vale para ν. □

Como consequência, os Lemas 4.4.1(2) e 4.4.1(3) garantem que, uma vez construída uma boa distribuição (r, δ)-controlada em cada pedaço de uma decomposição de T, podemos recombiná-las sem perder o controle sobre a expectativa de medida nem sobre o momento.

4.4.2 Lema de colagem II: controle em uma árvore $2(1-\delta)r$-minimal

O próximo resultado (Lema 4.3 em Norin–Turcotte) é mais técnico. Ele mostra que, se T é uma árvore métrica “minimal” de comprimento da ordem de $2(1-\delta)r$, então existe uma distribuição (r, δ)-controlada em $C(T, 0)$ cujo momento é quase ótimo.

Lema 4.4.2 (Lema 4.3 de Norin–Turcotte). *Sejam $r > 0$ e $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Se T é uma árvore métrica $2(1-\delta)r$-minimal, então existe uma medida de probabilidade ν em $C(T, 0)$, (r, δ)-controlada, tal que*

$$m(E_\nu) \;\leq\; |T| + \delta r.$$

De forma bastante resumida, a prova do Lema 4.4.2 combina três ingredientes principais:

- o Lema 3.3 (já apresentado no Capítulo 3), que garante que uma árvore l-minimal admite coberturas por *dois* raios cujas somas são, essencialmente, $|T|/2$, mas com uma certa folga e uma família contínua de escolhas de raios;
- a parte (1) do Lema 4.4.1, que transforma essa família contínua de coberturas em uma distribuição de probabilidade, cuja expectativa de medida é uma combinação de medidas uniformes em intervalos $[a, r]$;
- uma análise cuidadosa de três regimes de parâmetros (dependendo da relação entre $|T|$, r e a folga a do Lema 3.3), garantindo em cada caso que os intervalos usados estão contidos em $[0, (1-\delta)r]$ e que o momento $m(E_\nu)$ não ultrapassa $|T| + \delta r$.

Mais especificamente, fixam-se $l = 2(1-\delta)r$ e toma-se o parâmetro a dado pelo Lema 3.3 aplicado a T. Dependendo se $|T|/2 - 2a$ é maior ou menor do que $(1-\delta)r$ e r, a prova constrói, em cada caso, uma família afim de coberturas de T parametrizada por $y \in [0, 1]$, e depois aplica o Lema 4.4.1(1) para obter uma medida ν com

$$E_\nu = \text{soma de medidas uniformes do tipo } U[\alpha, r]$$

com $\alpha \leq (1-\delta)r$, isto é, (r, δ)-controlada. Em seguida, usa-se a linearidade de $m(\cdot)$ e a fórmula

$$m\big(U[a, b]\big) = a + b$$

para mostrar, em cada caso, que $m(E_\nu) \leq |T| + \delta r$. Os detalhes são algébricos e envolvem apenas estimativas das combinações lineares de $|T|$, r e a; remetemos ao artigo original para a conta completa.

Do ponto de vista conceitual, o Lema 4.4.2 garante que, em cada árvore $2(1-\delta)r$-minimal, é possível escolher uma distribuição de coberturas "quase frugal" (momento próximo de $|T|$) e cujo perfil de raios é bem comportado em $[0, r]$.

4.4.3 Lema de colagem III: controle global em qualquer árvore métrica

O passo seguinte é globalizar o controle obtido em uma peça minimal para uma árvore métrica arbitrária, usando uma decomposição em pedaços de comprimento controlado e os lemas de colagem anteriores. Este é o conteúdo do Lema 4.4 em Norin–Turcotte.

Lema 4.4.3 (Lema 4.4 de Norin–Turcotte)**.** *Para todo $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, todo $r > 0$ e toda árvore métrica T, existe uma medida de probabilidade ν em $C(T, r)$, (r, δ)-controlada, tal que*

$$m(E_\nu) \;\leq\; (1+\delta)|T| + 2r.$$

A prova se baseia na seguinte estratégia:

1. Escolhemos $l = 2(1-\delta)r$. Pelo Lema 2.5, podemos decompor T como

$$T = T_0 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_k,$$

onde $|T_0| \leq l$ e cada T_i (para $i \geq 1$) é l-minimal.:contentReference[oaicite:6]index=6

2. Para cada peça T_i com $i \geq 1$, aplicamos o Lema 4.4.2 e obtemos uma medida (r,δ)-controlada ν_i em $C(T_i, 0)$ tal que

$$m(E_{\nu_i}) \;\leq\; |T_i| + \delta r.$$

3. Para o pedaço “pequeno” T_0, usamos o Lema 3.1: como $|T_0| \leq l \leq 2(1-\delta)r$, o diâmetro de T_0 é no máximo $|T_0|$, de modo que uma única bola de raio $(1-\delta)r$ cobre T_0. Ao variar esse raio em $[(1-\delta)r, r]$ e aplicar novamente o Lema 4.4.1(a), obtemos uma medida (r,δ)-controlada ν_0 em $C(T_0, r - |T_0|) \subseteq C(T_0, r)$ com momento

$$m(E_{\nu_0}) \leq (2-\delta)r.$$

4. Finalmente, colamos todas essas distribuições usando o Lema 4.4.1(b). Obtemos assim uma medida ν em $C(T, r)$, (r,δ)-controlada, cuja expectativa de medida satisfaz

$$m(E_\nu) \;\leq\; \sum_{i=1}^{k}(|T_i| + \delta r) + (2-\delta)r \;\leq\; |T| + k\delta r + 2r.$$

   Como o número de peças k é controlado pelo comprimento de T (mais precisamente, $|T| \geq kr$), obtemos a estimativa afirmada

$$m(E_\nu) \leq (1+\delta)|T| + 2r.$$

Novamente, o artigo original contém as contas exatas, mas o ponto essencial é que cada T_i contribui um termo $|T_i| + \delta r$ para o momento e que o termo extra proporcional a $k\delta r$ é dominado por $\delta|T|$ justamente porque temos uma cota inferior $|T_i| \geq 2(1-\delta)r$ para as árvores minimais.

Capítulo 5

Prova do teorema 4.1

Neste capítulo combinamos as ferramentas determinísticas desenvolvidas no Capítulo 2 (como reduções estruturais e os critérios de cobertura por bolas) com a linguagem probabilística introduzida no Capítulo 3 (coberturas aleatórias, expectativa de medida e mome to). O objetivo é demonstrar o resultado analítico central de (Norin & Turcotte, 2024), que aqui será o teorema principal sobre coberturas aleatórias de uma árvore métrica.

De maneira informal, esse teorema afirma que, sempre que o comprimento total $|T|$ de uma árvore métrica T é suficientemente grande em comparação com um parâmetro de raio $r > 0$, existe uma distribuição de coberturas aleatórias ν cujos raios, em média, se comportam quase como se tivessem sido escolhidos de maneira uniforme no intervalo $[0, r]$. Em outras palavras, a expectativa de medida E_ν associada a ν é dominada por uma medida uniforme em $[0, r]$, com um folga multiplicativa arbitrariamente pequena $(1 + \varepsilon)$, desde que $|T|$ seja grande o bastante em função de ε e r.

No restante do trabalho, esse resulta será o elo entre o mundo contínuo das árvores métricas e o problema discreto do número de queima: a partir dele, será possível construir coberturas discreta quase uniforme em árvores finitas e, por fim, em grafos, levando ao limitante assintótico da conjectura do número de queima.

5.1 Enunciado e interpretação do teorema

Teorema 5.1.1 (Norin & Turcotte, 2024). *Sejam $\varepsilon, r > 0$ e T uma árvore métrica tal que*

$$|T| \geq 24\varepsilon^{-1} r,$$

então existe uma medida de probabilidade em $C(T, r)$ tal que

$$E_\nu \leq (1 + \varepsilon)\frac{|T|}{r} U[0, r].$$

Em particular, E_ν tem suporte em $[0, r]$ e é dominada por uma medida uniforme nesse intervalo.

Esse enunciado é formalmente conciso, mas ao mesmo tempo é bastante denso. A desigualdade

$$E_\nu \leq (1+\varepsilon)\frac{|T|}{r}U[0,r]$$

deve ser lida como uma comparação entre duas medidas na reta real positiva. Do lado esquerdo, E_ν é a expectativa de medida associada à distribuição de coberturas aleatórias ν: para cada intervalo $B \subseteq [0,r]$, o valor $E_\nu(B)$ representa o número esperado de raios pertencentes a B em uma cobertura escolhida aleatoriamente de acordo com ν, como discutido no Capítulo 3. Do lado direito, temos a medida uniforme $U[0,r]$, multiplicada pelo fator $|T|/r$ e pela constante $(1+\varepsilon)$.

Intuitivamente, o teorema afirma que existe uma forma de queimar T aleatoriamente com raios em $[0,r]$ de tal maneira que, ao longo de muitas realizações desse processo, a distribuição de raios em $[0,r]$ fica quase plana: nenhum subintervalo recebe "massa” de maneira desproporcional. Mais precisamente, qualquer intervalo $B \subseteq [0,r]$ contém em média, no máximo $(1+\varepsilon)\frac{|T|}{r}U[0,r](B)$ raios, isto é, um fator $(1+\varepsilon)$ acima do que ocorreria em uma distribuição perfeitamente uniforme com densidade $\frac{|T|}{r}$.

Em termos do momento $m(E_\nu)$, definido na Seção 3.1, essa desigualdade implica automaticamente um limitante do tipo

$$m(E_\nu) \;\leq\; (1+\varepsilon)\, m\Big(\tfrac{|T|}{r}U[0,r]\Big)\,,$$

de modo que a soma esperada dos raios em uma cobertura aleatória escolhida segundo ν não excedem salvo o fator multiplicativo $(1+\varepsilon)$, o valor ideal que seria obtido se todos os raios fosse distribuídos de forma perfeitamente uniforme $[0,r]$. Assim, o teorema fornece o tipo exato de quase-uniformidade que será necessário no capítulo seguinte.

5.2 Estratégia de prova

A prova do Teorema 5.1.1 é tecnicamente longa, mas a lógica é essencialmente linear. Nesta seção, descrevemos a estrutura geral do argumento, deixando os detalhes para a demonstração completa na Seção 5.3.

O primeiro passo consiste em tratar o caso em que ε é relativamente grande. Nessa situação, o enunciado é mais fácil de satisfazer, pois a folga multiplicativa $(1+\varepsilon)$ permite uma aproximação mais grosseira da medida uniforme. Explorando coberturas parametrizadas por $x \in [0,r]$, constrói-se uma distribuição de coberturas simples cuja expectativa de medida já é dominada por um múltiplo da medida uniforme em $[0,r]$. Um ajuste cuidadoso dos parâmetros mostra que, para ε acima de um certo limiar, o enunciado do teorema é automaticamente satisfeito.

Em seguida, o caso geral é obtido por um esquema de indução em um parâmetro inteiro n que controla a ordem de grandeza de ε. Em linhas gerais, fixa-se $n \geq 1$ e mostra-se que, se o teorema vale para todos os valores de ε maiores ou iguais a $15/(n-1)$, então ele também vale para todo ε no intervalo

$$\frac{15}{n} \leq \varepsilon \leq \frac{15}{n-1}.$$

Dessa forma, partindo do caso base (quando ε é grande o suficiente e baixando sucessivamente o valor de ε, obtém-se a validade do teorema para todo ε.

No passo indutivo, partimos de uma distribuição inicial ν_0 de coberturas que é (r, δ)-controlada em $[0, r]$ e cuja expectativa de medida pode ser decomposta em uma soma de medidas uniformes de cauda, da forma

$$E_{\nu_0} = \sum_i \lambda_i \, U[a_i, r],$$

com coeficientes, $\lambda_i \geq 0$ e $0 \leq a_i \leq r$. Essa decomposição expressa E_{ν_0} como um empilhamento de "blocos" uniformes que cobrem diferentes faixas de raios dentro de $[0, r]$.

Para cada um desses níveis a_i, aplicamos a hipótese de indução ao intervalo de raios menores ou iguais a a_i. Em outras palavras, construímos, por indução, uma distribuição de coberturas aleatórias cujo comportamento esperado é bem controlado quando usamos apenas raios em $[0, a_i]$. Em seguida, usamos o lema de colagem introduzido no Capítulo 2 para combinar, de forma controlada, essa distribuição em $[0, a_i]$ com a parte correspondente a $[a_i, r]$. O resultado dessa colagem é uma nova distribuição de coberturas em $C(T, r)$ cuja expectativa de medida ainda é uma combinação de medidas uniformes em subintervalos de $[0, r]$.

Por fim, tomamos uma combinação convexa adequada dessas distribuições coladas, ajustando os pesos de maneira que a expectativa de medida resultante E_ν fique dominada exatamente por $(1+\varepsilon)\frac{|T|}{r} U[0, r]$.

A seguir replicaremos em detalhe a prova de Norin & Turcotte.

5.3 Prova detalhada do Teorema 5.1.1

Demonstração. Suponha inicialmente que $\varepsilon \geq 12/11$. Fixe $k = \lceil |T|/r \rceil$, tal que $k \leq |T|/r + 1$. O Lema **??** garante que para cada $x \in [0, r]$ a $2k$-tupla

$$(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ vezes}}, \underbrace{r - x, \dots, r - x}_{k \text{ vezes}}) \in C(T),$$

já que a soma de todas as entradas é $kr \geq |T|$. Portanto, obtemos uma família contínua de coberturas parametrizada por x, cada uma obedecendo as condições necessárias para ser cobertura.

Para transformar essa família de coberturas em uma distribuição de coberturas aleatórias, vamos utilizar o lema 4.2(a). O lema garante que se $f_1, \dots, f_m : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ são funções afim tais que a tupla $(f_1(t), \dots, f_2(t))$ define uma cobertura de T para todo $t \in [0, 1]$, e se tomarmos $a_i = \min\{f_i(0), f_i(1)\}$, $b_i = \max\{f_i(0), f_i(1)\}$, e

$$l = \max\left\{\sum_i f_i(0), \sum_i f_i(1)\right\} - |T|$$

então existe uma distribuição de probabilidade $\nu : C(T) \to [0,1]$ com suporte em $C(T,l)$ cuja expectativa de medida satisfaz

$$E_\nu = \sum_i^m U[a_i, b_i].$$

Aplicamos esse lema reparametrizando o intervalo $[0,r]$ em $[0,1]$ com $t = x/r$. Definimos $2k$ funções

$$f_1(t) = \cdots = f_k(t) = rt, \quad \text{e} \quad f_{k+1}(t) = \cdots = f_{2k}(t) = r(1-t).$$

Para cada $t \in [0,1]$, a tupla $(f_1(t), \dots, f_{2k}(t))$ coincide com a família de coberturas descrita anteriormente, garantindo que $(f_1(t), \dots, f_{2k}(t)) \in C(T)$. Calculando as extremidades de cada função obtemos $a_i = 0$ e $b_i = r$ para todo i. Agora, como $\sum_i f_i(0) = \sum_i f_i(1) = kr$, temos

$$l = kr - |T| \geq 0. \tag{5.1}$$

Portanto, pelo Lema ?? existe uma distribuição de probabilidade ν com suporte em $C(T, kr - |T|) \subset C(T,r)$ e tal que

$$E_\nu = \sum_{i=1}^{2k} U[0,r] = 2k \cdot U[0,r].$$

Lembre-se que $C(T, kr-|T|) \subset C(T,r)$, uma vez que, pela definição de k temos $k = \lceil |T|/r \rceil \leq |T|/r + 1$, o que implica $kr - |T| \leq r$. Uma vez que $k \leq |T|/r + 1$, segue que

$$E_\nu \leq 2(\frac{|T|}{r} + 1)U[0,r]. \tag{5.2}$$

No que segue, mostramos que o lado direito de (5.2) vale no máximo $(1+\varepsilon)\frac{|T|}{r}U[0,r]$. Primeiramente, expandindo (5.2), obtemos

$$2(\frac{|T|}{r} + 1) = \frac{|T|}{r}(2 + \frac{2r}{|T|}). \tag{5.3}$$

Além disso, pela hipótese do teorema, temos $|T| \geq 24\varepsilon^{-1}r$, ou, equivalentemente, $\frac{r}{|T|} \leq \frac{\varepsilon}{24}$. Substituindo em (5.3) obtemos

$$\frac{|T|}{r}(2 + \frac{2r}{|T|}) \leq \frac{|T|}{r}(2(1 + \frac{\varepsilon}{24})) = 2(1 + \frac{\varepsilon}{24})\frac{|T|}{r},$$

o que nos dá

$$E_v \leq 2(1+\frac{\varepsilon}{24})\frac{|T|}{r}U[0,r].$$

Finalmente, afirmamos que como $\varepsilon \geq 12/11$, temos $2(1+\frac{\varepsilon}{24}) \leq (1+\varepsilon)$, o que nos dá o resultado desejado. De fato, expandindo os dois lados:

$$2+\frac{\varepsilon}{12} \leq 1+\varepsilon \iff 1 \leq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{12} = \frac{11}{12}\varepsilon \iff \varepsilon \geq \frac{12}{11}.$$

Concluímos que se $\varepsilon \geq 12/11$, então $E_v \leq (1+\varepsilon)\frac{|T|}{r}U[0,r]$, como desejado.

Então, podemos assumir que $\varepsilon < 12/11$. Vamos provar, por indução $n \geq 1$ que o enunciado vale para qualquer ε satisfazendo $\varepsilon \geq 15/n$. Observe que, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $n \geq \lceil 15/\varepsilon \rceil$, ou seja, temos ε tal que $15/n \leq \varepsilon$. Isso implica que o teorema vale para todo $\varepsilon > 0$. O caso base, quando $n \leq 13$, foi verificado anteriormente. Então, podemos assumir que $n \geq 14$ e que o teorema vale para todo $\varepsilon^\star \geq 15/(n-1)$. Agora, seja ε tal que

$$\frac{15}{n-1} > \varepsilon \geq \frac{15}{n},$$

e tome

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{13}, \quad \delta = \frac{\varepsilon}{8}.$$

Primeiro vamos verificar que ε' é grande o suficiente para que a hipótese de indução seja válida. Usando o fato que $\varepsilon \geq 15/n$,

$$\varepsilon' = \varepsilon(1+\frac{\varepsilon}{13}) \geq \frac{15}{n}(1+\frac{15}{13n}).$$

É suficiente checar que

$$\frac{15}{n}(1+\frac{15}{13n}) \geq \frac{15}{n-1}.$$

De fato, a desigualdade acima é verdeira quando $n \geq 7.5$. Como $n \geq 14$ concluímos que $\varepsilon' \geq 15/(n-1)$ e portanto o teorema é válido para ε' pela hipótese de indução.

Nesse ponto vamos aplicar o lema 4.4 para os parâmetros

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8}, \quad r \leq \frac{\varepsilon}{24}|T|.$$

O lema garante a existência de uma medida v_0 com suporte em $C(T,r)$, coeficientes $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \geq 0$ e números reais $a_1,\ldots,a_k$ satisfazendo $0 \leq a_i \leq (1-\delta)r$ para todo i tal que a expectativa de medida de v_0 apresenta a decomposição

$$E_{v_0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U[a_i, r],$$

cujo momento satisfaz o limitante

$$m(E_{\nu_0}) \leq (1 + \delta)|T| + 2r.$$

Substituindo $\delta = \varepsilon/8$ e $r \leq \frac{\varepsilon}{24}|T|$ na desigualdade acima obtemos

$$m(E_{\nu_0}) \leq (1 + \frac{5\varepsilon}{24})|T|.$$

Como $\frac{5\varepsilon}{24} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ podemos escrever

$$m(E_{\nu_0}) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{4})|T|.$$

Contudo, pela definição de momento e sua linearidade podemos afirmar que

$$m(E_{\nu_0}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m(U[a_i, r]) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (r + a_i).$$

Combinando as duas expressões obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (r + a_i) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{4})|T|.$$

Como o teorema assume que $r \leq \frac{\varepsilon}{24}|T|$ podemos relacionar o tamanho total $|T|$ a cada a_i da seguinte maneira.

Como $a_i \leq r$ e $\varepsilon' \geq \varepsilon$ temos

$$|T| \geq \frac{24r}{\varepsilon} \geq \frac{24a_i}{\varepsilon} \geq \frac{24a_i}{\varepsilon'} \quad \text{para todo } i \in [k].$$

Essa desigualdade garante que para cada par (T, a_i) o teorema é satisfeito mas com um parâmetro maior ε'. Portanto, para cada i, a hipótese de indução pode ser aplicada com o parâmetro ε' em vez de ε e a_i em vez de r.

Logo, pela hipótese de indução, para cada $i \in [k]$ existe uma distribuição de probabilidade ν_i com suporte em $C(T, a_i) \subset C(T, r)$, tal que

$$E_{\nu_i} \leq (1 + \varepsilon')\frac{|T|}{a_i} U[0, a_i].$$

Agora, de posse dessas distribuições de probabilidades $\nu_0, \ldots \nu_k$ suportadas em $C(T, r)$ podemos aplicar o lema 4.2(c) para combiná-las em uma única medida. Para isso vamos definir os coeficientes da soma convexa.

Defina

$$q := (1+\varepsilon')|T| + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r - a_i}.$$

Os coeficientes da soma convexa são

$$p_0 := \frac{(1+\varepsilon')|T|}{q}, \quad p_i := \frac{\alpha_i a_i}{(r-a_i)q} \quad (i = 1, \dots, k).$$

Esses coeficientes são não-negativos e satisfazem

$$p_0 + \sum_{i=1}^{k} p_i = \frac{(1+\varepsilon')|T| + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r-a_i}}{q} = 1,$$

logo o vetor $(p_0, \dots, p_k)$ é um vetor válido para o lema 4.2(c).

Dessa forma, existe uma medida de probabilidade ν suportada em $C(T, r)$ tal que

$$E_\nu = p_0 E_{\nu_0} + \sum_{i=1}^{k} p_i E_{\nu_i}$$

Substituindo os parâmetros:

$$\begin{aligned}
E_\nu &\leq p_o \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U[a_i, r] + \sum_{i=i}^{k} p_i (1+\varepsilon') \frac{|T|}{a_i} U[0, a_i] \\
&\leq p_o \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_0} \frac{|T|}{a_i} (1+\varepsilon') U[0, a_i] + \alpha_i U[a_i, r] \\
&\leq p_0 \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_1 a_i^2}{(1+\varepsilon')|T|(r-a_i)} \cdot (1+\varepsilon') \frac{|T|}{a_i} U[0, a_i] + \alpha_i U[\alpha_i, r] \right) \\
&\leq p_0 \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_i r}{(r-a_i)} \left(\frac{a_i}{r} U[0, a_i] + \frac{r-a_i}{r} U[a_i, r] \right) \right)
\end{aligned}$$

Agora, utilizamos o fato de que $U[0, r] = \frac{a_i - 0}{r - 0} U[0, a_i] + \frac{r - a_i}{r - 0} U[a_i, r]$. Assim, podemos escrever que

$$E_\nu \leq p_0 \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i r}{(r-a_i)} \right) U[0, r].$$

Portanto para terminar de provar o teorema basta mostrar que $p_0 (\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i r}{(r-a_i)}) \leq \frac{(1+\varepsilon)|T|}{r}$. Para isso vamos substituir p_0 e verificar para quais valores de ε a desigualdade é válida.

$$\frac{(1+\varepsilon')|T|}{(1+\varepsilon')|T| + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r-a_i}} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i r}{r-a_i} \leq \frac{(1+\varepsilon)|T|}{r}$$

$$(1+\varepsilon') \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i r^2}{r-a_i} \leq (1+\varepsilon)|T| + \frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon')} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r-a_i}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i r^2}{r-a_i} \leq (1+\varepsilon)|T| + \frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon')} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r-a_i}$$

Rearranjando o termo da esquerda

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(r+a_i) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i^2}{r-a_i} \leq (1+\varepsilon)|T| + \frac{(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon')} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r-a_i}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(r+a_i) \leq (1+\varepsilon)|T| + (\frac{(1+\varepsilon)-1}{(1+\varepsilon')}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r-a_i}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(r+a_i) + \frac{\varepsilon'-\varepsilon}{1+\varepsilon'} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i a_i^2}{r-a_i} \leq (1+\varepsilon)|T|$$

Agora vamos nos concentrar no segundo termo do lado esquerdo.

Primeiro vamos provar que $a_i^2 \leq \frac{r(r+a_i)}{2}$. Como, $a_i \leq r$, podemos escrever que $ra_i \leq r^2$. Assim, a média entre de ra_i e r^2 deve ser maior que ra_i. Então, vale que $ra_i \leq \frac{r^2+ra_i}{2}$. Contudo, como $a_i^2 \leq ra_i$ pode escrever que $a_i^2 \leq \frac{r(r+a_i)}{2}$. Dividindo ambos os lados por $r-a_i$ e aplicando que $a_i \leq (1-\delta)r$ obtemos que $\frac{a_i^2}{r-a_i} \leq \frac{r+a_i}{2\delta}$. Assim, vale para o segundo termo da desigualdade o seguinte:

$$\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i^2}{r-a_i} \leq \frac{\varepsilon'-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{2\delta} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(r+a_i).$$

Substituindo os valores de ε' e δ obtemos

$$\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{a_i^2}{r-a_i} \leq \frac{4\varepsilon}{13} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(r+a_i).$$

Substituindo na desigualdade principal no lugar do segundo termo obtemos

$$(1+\frac{4\varepsilon}{13}) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(r+a_i) \leq (1+\varepsilon)|T|.$$

Contudo, provamos acima que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(r + a_i) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{4})|T|$. Assim, a desigualdade que estamos investigando se torna

$$(1 + \frac{4\varepsilon}{13})(1 + \frac{\varepsilon}{4})|T| \leq (1 + \varepsilon)|T|.$$

É fácil verificar que a desigualdade vale para todo $\varepsilon \leq 2$ e portanto vale para nosso $\varepsilon < 15/(n-1)$ com $n \geq 14$. Logo, podemos escrever que

$$Ev \leq p_0(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i r}{(r - a_i)})U[0, r] \leq \frac{(1+\varepsilon)|T|}{r} U[0, r].$$

Ou seja, por indução, o teorema vale para todo $n \geq 1$ e consequentemente para todo $\varepsilon > 0$. $\square$

Capítulo 6

Prova do Teorema 5.3

Neste capítulo apresentamos em detalhes a demonstração do Teorema 6.2.1, que constitui o elo final entre a teoria fracionária desenvolvida no Teorema 5.1.1 e a forma discreta desejada para a Conjectura do Número de Queima. O objetivo é mostrar que, sob uma hipótese de tamanho subquadrático para uma árvore métrica T, a sequência canônica de raios $(1, 2, \dots, k)$ já é suficiente para cobrir T.

A prova é probabilística e baseia-se na construção de coberturas aleatórias quase uniformes, como no Teorema 5.1.1, seguida de um argumento de concentração que garante que, com probabilidade positiva, nenhum subintervalo curto de raios recebe "massa demais". A partir dessa realização favorável, fazemos uma etapa puramente combinatória: concatenamos as coberturas locais, discretizamos os raios e, por fim, os reorganizamos até obter exatamente a sequência $(1, 2, \dots, k)$.

Começamos recordando duas desigualdades de concentração que serão usadas de forma essencial: a desigualdade de Markov e a desigualdade de Hoeffding.

6.1 Desigualdades de concentração

6.1.1 Desigualdade de Markov

A desigualdade de Markov é a forma mais elementar de estimar a probabilidade de que uma variável aleatória não negativa assuma valores muito grandes em função de sua esperança. Embora seja bastante fraca em geral, ela é suficiente no nosso contexto para controlar a contribuição de um intervalo específico de raios, e serve como ponto de partida para o argumento de concentração.

Teorema 6.1.1 (Desigualdade de Markov). *Se $X \geq 0$ é uma variável aleatória e $a > 0$, então*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Em palavras, a desigualdade afirma que a probabilidade de X ultrapassar um limiar a é no máximo a razão entre o valor esperado $\mathbb{E}[X]$ e esse limiar. Quando sabemos que

$\mathbb{E}[X]$ é significativamente menor que a, obtemos uma boa cota superior para $\mathbb{P}(X \geq a)$. No nosso caso, X será um contador do número de raios em um pequeno intervalo de comprimentos, e a desigualdade dirá que, em média, esse número tende a ser menor que o valor "ideal" que gostaríamos de impor.

6.1.2 Desigualdade de Hoeffding

A desigualdade de Hoeffding é uma forma típica de desigualdade do tipo Chernoff: ela fornece um decaimento exponencial para a probabilidade de grandes desvios da média quando somamos variáveis aleatórias independentes e uniformemente limitadas. Essa ferramenta será usada para reforçar a estimativa de Markov e controlar simultaneamente muitos intervalos distintos de raios.

Teorema 6.1.2 (Desigualdade de Hoeffding). *Se $X_1, \dots, X_m$ são variáveis aleatórias independentes com valores em $[a, b]$, se $X = \sum_{i=1}^m X_i$ e $t > 0$, então*

$$\mathbb{P}\big(X \geq \mathbb{E}[X] + t\big) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{m(b-a)^2}\right).$$

A interpretação é a seguinte: se cada X_i está contido em um intervalo fixo $[a, b]$, então a probabilidade de que a soma X exceda a sua esperança por uma margem t decai exponencialmente em t^2 e em m. No contexto deste capítulo, tomaremos X_i como a contribuição de uma partição T_i para o número de raios em um certo intervalo, e aplicaremos a desigualdade para concluir que, com probabilidade muito próxima de 1, nenhum intervalo curto recebe mais do que um certo número de raios.

6.2 Enunciado e interpretação do Teorema 5.3

Recordamos agora o enunciado central deste capítulo, que aparece em Norin e Turcotte, 2024, Teorema 5.3 e que será demonstrado na sequência. Ele estabelece uma condição suficiente para que a sequência de raios inteiros $(1, 2, \dots, k)$ constitua uma cobertura de uma árvore métrica de tamanho subquadrático.

Teorema 6.2.1 (Teorema 5.3, Norin–Turcotte). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $K = K_{5.3}(\varepsilon)$ tal que, se $k \in \mathbb{N}$ satisfaz $k \geq K$ e T é uma árvore métrica com $|T| \leq (1-\varepsilon)k^2$, então a sequência $(1, 2, \dots, k)$ é uma cobertura de T.*

O parâmetro $\varepsilon > 0$ mede uma folga em relação ao limite quadrático: exigimos que $|T|$ seja estritamente menor que k^2 por um fator multiplicativo fixo $1 - \varepsilon$. Para cada valor de ε fixado, o teorema assegura a existência de um limiar $K_{5.3}(\varepsilon)$ a partir do qual, sempre que $k \geq K_{5.3}(\varepsilon)$ e T tiver comprimento total $|T| \leq (1-\varepsilon)k^2$, a sequência canônica de raios inteiros $(1, 2, \dots, k)$ já cobre toda a árvore.

Do ponto de vista da dinâmica de queima de grafos, este resultado diz que, quando traduzimos o problema para modelo contínuo de árvores métricas, a família de raios mais natural possível (todas as inteiras de 1 a k) é assintoticamente suficiente para queimar qualquer árvore "não muito grande" em comparação com k^2. Esse é o passo que permite, mais adiante, conectar o teorema fracionário obtido em 5.1.1 com o enunciado discreto original sobre grafos finitos.

6.3 Demonstração do Teorema 5.3

Passamos agora à prova do Teorema 6.2.1. A estratégia segue fielmente Norin e Turcotte, 2024 e pode ser descrita, em linhas gerais, da seguinte forma.

Primeiro, fixamos parâmetros auxiliares N, λ e P, que serão usados para controlar a uniformidade da distribuição de raios em pequenos intervalos. Em seguida, decompomos a árvore métrica T em subárvores $T_1, \dots, T_m$ de tamanho controlado por meio do Lema **??**. Em cada T_i, aplicamos o Teorema 5.1.1 com um parâmetro ε_i adequado, obtendo uma cobertura aleatória quase uniforme com raios em $[0, r]$, onde $r \approx k$.

A partir dessas coberturas aleatórias, definimos variáveis aleatórias $Z_i(\alpha)$ que contam quantos raios em T_i caem em um pequeno intervalo I_α de comprimentos de ordem k/N. A desigualdade (6.1) mostra que a esperança da soma $\sum_i Z_i(\alpha)$ é estritamente menor que o número "ideal" k/N de raios por intervalo. Com isso em mãos, aplicamos a desigualdade de Markov para o intervalo inicial e a desigualdade de Hoeffding para os demais intervalos, obtendo uma cota global para a probabilidade de que algum intervalo ultrapasse o limite k/N.

Como essa probabilidade é estritamente menor que 1, conclui-se que existe uma escolha determinística das coberturas locais $r_1, \dots, r_m$ com a seguinte propriedade: nenhum intervalo curto contém demasiados raios. Concatenando essas coberturas e realizando um procedimento de "empurrar para a direita" e discretizar, obtemos uma cobertura por raios inteiros distintos no intervalo $[k/N, k]$. Finalmente, completamos essa família até a sequência inteira $(1, 2, \dots, k)$, o que termina a demonstração.

Demonstração. Podemos supor $0 < \varepsilon < 1$. Escolhemos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e definimos

$$\lambda := 1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right)(1 - \varepsilon)}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2}.$$

Quando N cresce, o fator $\frac{\left(1+\frac{1}{N}\right)(1-\varepsilon)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2}$ tende a $1 - \varepsilon$, de modo que

$$\lim_{N\to\infty} \lambda = 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon > 0.$$

Assim, para N grande o suficiente, λ é positivo.

Com N e $\lambda > 0$ fixos, escolhemos um inteiro $P \geq 1$ tal que

$$N \exp\left(-\frac{\lambda^2}{24N^4(1-\varepsilon)^2} P\right) < \lambda.$$

A função do lado esquerdo é contínua e decrescente em P, tendendo a 0 quando $P \to \infty$;

portanto sempre existe um P que satisfaz a desigualdade. Definimos então

$$D = 24N \quad \text{e} \quad K = \frac{PD}{1-\varepsilon}.$$

Essas definições são imediatas e não impõem novas restrições.

Assumimos, sem perda de generalidade, que

$$|T| = (1-\varepsilon)k^2 \geq PDk.$$

Se essa desigualdade não fosse satisfeita, poderíamos estender a árvore métrica T. Nesse contexto, "estender" significa adicionar um pequeno segmento a uma folha de T, isto é, unir a T um intervalo adicional de comprimento

$$\Delta = PDk - |T|.$$

O resultado é uma nova árvore métrica T' com $|T'| = |T| + \Delta = PDk$. Como estamos apenas interessados na existência de uma cobertura, podemos trabalhar com T' e, ao final, restringir de volta a T.

Aplicando o Lema **??**, obtemos uma decomposição da árvore métrica T em subárvores métricas

$$T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_m,$$

disjuntas, tais que

$$Dk \leq |T_i| \leq 3Dk \quad \text{para todo } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Somando as desigualdades, segue que

$$mDk \leq |T| \leq 3mDk.$$

Como assumimos que $|T| \geq PDk$, obtemos

$$PDk \leq 3mDk \quad \Longrightarrow \quad m \geq \frac{P}{3}.$$

Portanto, a árvore métrica T pode ser particionada em m subárvores, todas de tamanho controlado, com número de partições proporcional a P.

Fixamos

$$r = \left(1 - \frac{1}{N}\right) k.$$

Para cada subárvore métrica T_i da decomposição escolhemos

$$\varepsilon_i := \frac{24r}{|T_i|}.$$

Por construção, $|T_i| = 24r/\varepsilon_i$, de modo que podemos aplicar o Teorema 5.1.1 em cada T_i.

Consequentemente, existe uma distribuição de probabilidade ν_i em $C(T_i, r)$ tal que

$$E_{\nu_i} \leq \big(1+\varepsilon_i\big)\frac{|T_i|}{r}\, U[0,r].$$

Como $|T_i| \geq Dk = 24Nk$ e $r = (1-\frac{1}{N})k$, temos

$$\varepsilon_i = \frac{24(1-\frac{1}{N})k}{|T_i|} \leq \frac{24(1-\frac{1}{N})k}{24Nk} = \frac{1-\frac{1}{N}}{N} \leq \frac{1}{N},$$

e, portanto,

$$E_{\nu_i} \leq \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{|T_i|}{r}\, U[0,r].$$

Seja r_i uma cobertura aleatória de T_i com raios em $[0,r]$, escolhida de acordo com a lei ν_i, e suponha que as escolhas $r_1, \ldots, r_m$ são independentes. Para controlar quantos raios caem em um intervalo pequeno, introduzimos um parâmetro

$$\alpha \in \left[0,\ 1-\frac{2}{N}\right]$$

e o intervalo

$$I_\alpha\ := [\alpha k,\ (\alpha+\tfrac{1}{N})k].$$

Como $r = (1-\frac{1}{N})k$ e $\alpha \leq 1-\frac{2}{N}$, temos $\alpha k \geq 0$ e

$$(\alpha+\tfrac{1}{N})k \leq (1-\tfrac{1}{N})k = r,$$

logo $I_\alpha \subset [0,r]$.

Definimos então a variável aleatória

$$Z_i(\alpha)\ := \#\big(I_\alpha, r_i\big),$$

isto é, $Z_i(\alpha)$ conta o número de raios do vetor r_i que pertencem ao intervalo I_α.

Pela definição de expectativa de medida, podemos escrever

$$\mathbb{E}[Z_i(\alpha)] = E_{\nu_i}(I_\alpha) \leq (1+\varepsilon_i)\,\frac{|T_i|}{r}\, U[0,r](I_\alpha).$$

Como $U[0,r]$ é a medida uniforme em $[0,r]$, a massa de I_α é proporcional ao comprimento do intervalo. Em particular,

$$U[0,r](I_\alpha) = \frac{|I_\alpha|}{r} = \frac{(\frac{1}{N})k}{r} = \frac{(\frac{1}{N})k}{(1-\frac{1}{N})k} = \frac{1}{N\big(1-\frac{1}{N}\big)}.$$

Substituindo,

$$\mathbb{E}[Z_i(\alpha)] \leq (1+\varepsilon_i)\,\frac{|T_i|}{r}\cdot\frac{1}{N\big(1-\frac{1}{N}\big)} = (1+\varepsilon_i)\,\frac{|T_i|}{N\big(1-\frac{1}{N}\big)^2 k}.$$

Pelo limite anterior $\varepsilon_i \leq \frac{1}{N}$, obtemos

$$\mathbb{E}[Z_i(\alpha)] \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{|T_i|}{N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 k}.$$

Somando sobre $i = 1, \dots, m$ usando $|T| = \sum_i |T_i| = (1 - \varepsilon)k^2$ e lembrando que

$$1 - \lambda = \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right)(1 - \varepsilon)}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2},$$

escrevemos

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} Z_i(\alpha)\right] \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{|T|}{N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right)(1 - \varepsilon)}{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2} \cdot \frac{k}{N} = \frac{1 - \lambda}{N} k.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} Z_i(\alpha)\right] \leq \frac{1 - \lambda}{N} k, \qquad \alpha \in \left[0, 1 - \frac{2}{N}\right]. \tag{6.1}$$

Em palavras, cada intervalo pequeno I_α (de largura k/N) contém, em média, no máximo $(1 - \lambda)k/N$ raios quando agregamos todas as partições T_i.

Passo probabilístico: Markov e Hoeffding. Aplicamos agora desigualdades de concentração às variáveis aleatórias $Z_i(\alpha)$.

Primeiro, tomamos $\alpha = 0$ em (6.1) e usamos a desigualdade de Markov (Teorema 6.1.1). Obtemos

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} Z_i(0) \geq \frac{k}{N}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} Z_i(0)\right]}{k/N} \leq \frac{(1 - \lambda)k/N}{k/N} = 1 - \lambda.$$

Esta desigualdade vale para qualquer α, mas para $\alpha > 0$ precisaremos de um controle mais forte, via uma desigualdade do tipo Chernoff (Hoeffding, Teorema 6.1.2).

Seja agora $\alpha \geq \frac{1}{N}$. Como r_i é uma cobertura r-boa de T_i, a soma dos raios em r_i satisfaz

$$\|r_i\|_1 \leq |T_i| + r.$$

Além disso, cada vez que contamos um raio em $Z_i(\alpha)$, esse raio é pelo menos αk. Assim,

$$Z_i(\alpha) \cdot (\alpha k) \leq \|r_i\|_1 \leq |T_i| + r.$$

Usando $|T_i| \leq 3Dk$ e $r = (1 - \frac{1}{N})k \leq k$, obtemos

$$|T_i| + r \leq 3Dk + k \leq (3D + 1)k \leq 4Dk,$$

pois $D = 24N \geq 1$. Portanto

$$Z_i(\alpha)\,\alpha k \leq 4Dk \quad\Longrightarrow\quad 0 \leq Z_i(\alpha) \leq \frac{4D}{\alpha}.$$

Como $\alpha \geq \frac{1}{N}$, temos $\frac{1}{\alpha} \leq N$ e, usando ainda $|T| \geq mDk$ e $|T| = (1-\varepsilon)k^2$, obtemos

$$\frac{4D}{\alpha} \leq 4DN \leq \frac{4N|T|}{mk} = \frac{4N(1-\varepsilon)k}{m}.$$

Logo,

$$0 \leq Z_i(\alpha) \leq \frac{4N(1-\varepsilon)k}{m} \quad \text{para todo } i \in \{1,\dots,m\},\ \alpha \geq \tfrac{1}{N}.$$

Aplicamos agora a desigualdade de Hoeffding (Teorema 6.1.2) às variáveis independentes $Z_1(\alpha),\dots,Z_m(\alpha)$, todas limitadas no intervalo $[0,B]$ com

$$B := \frac{4N(1-\varepsilon)k}{m}.$$

Tomamos $t := \frac{\lambda k}{N}$ e usamos (6.1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m Z_i(\alpha) \geq \frac{k}{N}\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m Z_i(\alpha) \geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m Z_i(\alpha)\right] + \left(\frac{k}{N} - \frac{1-\lambda}{N}k\right)\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m Z_i(\alpha) \geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m Z_i(\alpha)\right] + t\right)\\
&\leq \exp\left(-\frac{2t^2}{mB^2}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{2(\lambda k/N)^2}{m\big(4N(1-\varepsilon)k/m\big)^2}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2 m}{8N^4(1-\varepsilon)^2}\right).
\end{aligned}$$

Como $m \geq P/3$, segue que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m Z_i(\alpha) \geq \frac{k}{N}\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{8N^4(1-\varepsilon)^2}\cdot\frac{P}{3}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{24N^4(1-\varepsilon)^2}P\right),$$

para todo $\alpha \in [\frac{1}{N}, 1-\frac{2}{N}]$.

Passagem ao caso determinístico (união). Definimos, para $j \in \{0,1,\dots,N-2\}$, os intervalos

$$I_j := \left[\frac{j}{N}k, \frac{j+1}{N}k\right].$$

Note que $I_0 = I_0$ corresponde a $\alpha = 0$, enquanto I_j com $j \geq 1$ corresponde a $\alpha = j/N \geq 1/N$.

Pelo caso $\alpha = 0$ e pela desigualdade de Markov acima, temos

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} Z_i(0) \geq \frac{k}{N}\right) \leq 1 - \lambda.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, N-2\}$, aplicando a desigualdade de Hoeffding com $\alpha = j/N$ obtemos

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} Z_i\left(\frac{j}{N}\right) \geq \frac{k}{N}\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{24N^4(1-\varepsilon)^2}P\right).$$

Pelo princípio da união,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\exists j \in \{0, \dots, N-2\} \text{ tal que } \sum_{i=1}^{m} Z_i\left(\frac{j}{N}\right) \geq \tfrac{k}{N}\Big) &\leq \sum_{j=0}^{N-2} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{m} Z_i\left(\frac{j}{N}\right) \geq \frac{k}{N}\right) \\
&< (1-\lambda) + N\exp\left(-\frac{\lambda^2}{24N^4(1-\varepsilon)^2}P\right) \\
&< (1-\lambda) + \lambda = 1,
\end{aligned}$$

pela escolha de P. Portanto, a probabilidade de que *nenhum* dos eventos

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} Z_i\left(\tfrac{j}{N}\right) \geq \tfrac{k}{N}\right\}, \quad j = 0, \dots, N-2,$$

ocorra é estritamente positiva. Logo, existe uma escolha determinística de coberturas

$$\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^m$$

de $T_1, \dots, T_m$ respectivamente, todas com raios em $[0, r]$, tal que para cada $j \in \{0, 1, \dots, N-2\}$ temos

$$\sum_{i=1}^{m} Z_i\left(\frac{j}{N}\right) < \frac{k}{N}.$$

Concatenação e rediscretização dos raios. Seja $\mathbf{r}$ a concatenação das coberturas $\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^m$. Os raios de $\mathbf{r}$ pertencem a $[0, r]$ e, pela propriedade acima, para cada $j \in \{0, 1, \dots, N-2\}$ o número de raios de $\mathbf{r}$ que pertence a

$$I_j = \left[\frac{j}{N}k, \frac{j+1}{N}k\right]$$

é estritamente menor que $\frac{k}{N}$. Em particular,

$$\#\big(I_j \cap \mathbf{r}\big) < \frac{k}{N} \quad \Longrightarrow \quad \#\big(I_j \cap \mathbf{r}\big) \leq \left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor.$$

Observe que o intervalo I_j tem comprimento k/N, logo contém no máximo $\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor$ inteiros.

Por outro lado, o intervalo seguinte

$$I_{j+1} = \left[\frac{j+1}{N}k, \frac{j+2}{N}k\right]$$

contém pelo menos $\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor$ inteiros. Assim, para cada j existe uma injeção

$$\varphi_j \,:\, R_j \longrightarrow I_{j+1} \cap \mathbb{Z},$$

onde

$$R_j \,:= \{r \in \mathbf{r} \,:\, r \in I_j\}$$

é o conjunto de raios de $\mathbf{r}$ que caem em I_j. Intuitivamente, vamos "empurrar" cada raio de I_j para um inteiro distinto no intervalo seguinte I_{j+1}.

Mais explicitamente, seja $R_j = \{r_0, \dots, r_\ell\}$ com $r_0 \le \cdots \le r_\ell$, e seja s o menor inteiro em I_{j+1}. Como $\ell + 1 = |R_j| \le \lfloor k/N \rfloor$ e $I_{j+1} \cap \mathbb{Z}$ contém pelo menos $\lfloor k/N \rfloor$ inteiros, podemos definir

$$\varphi_j(r_i) \,:= s + i, \quad i = 0, \dots, \ell,$$

obtendo uma injeção $R_j \to I_{j+1} \cap \mathbb{Z}$.

Substituindo, para cada j, os raios de $\mathbf{r}$ que pertencem a I_j pelos inteiros correspondentes $\varphi_j(r)$ em I_{j+1}, obtemos uma nova cobertura $\mathbf{r}'$ de T. Cada raio é aumentado em, no máximo, o comprimento de um intervalo I_j, isto é, em no máximo k/N. Como aumentar raios só pode aumentar a região coberta, $\mathbf{r}'$ continua sendo uma cobertura de T.

Além disso, por construção:

- para cada j, os raios de $\mathbf{r}'$ que pertencem a I_{j+1} são inteiros distintos (pois φ_j é injetiva), e
- raios provenientes de intervalos distintos I_j são enviados para intervalos seguintes distintos I_{j+1}.

Logo, todos os raios de $\mathbf{r}'$ são inteiros distintos, e, como o menor intervalo de chegada é $I_1 = [k/N, 2k/N]$ e o maior é $I_{N-1} = [(N-1)k/N, k]$, temos

$$\mathbf{r}' \subset \left[\frac{k}{N}, \, k\right] \cap \mathbb{Z}.$$

Em particular, o conjunto de raios de $\mathbf{r}'$ é um subconjunto de $\{1, 2, \dots, k\}$, e $\mathbf{r}'$ é uma cobertura de T. Se algum inteiro em $\{1, 2, \dots, k\}$ não aparecer como raio de $\mathbf{r}'$, podemos simplesmente adicioná-lo como novo raio (escolhendo centros arbitrários), o que só pode aumentar a região coberta. Assim, obtemos uma nova cobertura cujos raios são exatamente os inteiros

$$(1, 2, \dots, k).$$

Portanto, $(1, 2, \dots, k)$ é uma cobertura de T, como queríamos demonstrar. $\square$

Capítulo 7

Do contínuo ao discreto: prova do Teorema 1.2

Neste capítulo concluímos a passagem do modelo contínuo de árvores métricas para o cenário discreto de grafos finitos, obtendo o resultado principal do Norin e Turcotte, 2024. A ideia é combinar o Teorema 6.2.1, demonstrado no capítulo anterior para árvores métricas, com um lema simples que transfere coberturas de uma árvore métrica T^M para a árvore discreta subjacente T, acrescentando 1 a todos os raios.

O resultado final é o Teorema 7.1.1, que afirma que o número de queima satisfaz $b(G) \leq (1 + o(1))\sqrt{n}$ para todo grafo conexo G com n vértices. Em termos da Conjectura do Número de Queima, isso mostra que a conjectura vale assintoticamente: o limite $\sqrt{n}$ é, de fato, a ordem de grandeza correta do número de queima.

7.1 Enunciado do resultado principal

Recordamos primeiro que, se T é uma árvore geradora de um grafo conexo G, então qualquer estratégia de queima que funcione em T também funciona em G. Em particular,

$$b(G) \;\leq\; b(T),$$

pois adicionar arestas aos caminhos de propagação do fogo não pode dificultar a cobertura do grafo. Assim, para demonstrar um limite superior assintótico para $b(G)$ em função de $n = |V(G)|$, é suficiente trabalhar com árvores.

O resultado principal de Norin e Turcotte Norin e Turcotte, 2024, que enuncia a forma assintótica da Conjectura do Número de Queima, é o seguinte.

Teorema 7.1.1 (Teorema 1.2, Norin–Turcotte)**.** *Se G é um grafo conexo com n vértices, então*

$$b(G) \leq (1 + o(1))\sqrt{n}.$$

Equivalentemente, para cada $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que, se G é um grafo conexo com $n \geq N$ vértices, então

$$b(G) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{n}.$$

É exatamente essa formulação quantificada que utilizaremos na demonstração.

7.2 Transferência métrica–discreta

Nesta seção registramos o lema que faz a ponte entre o modelo contínuo e o modelo discreto. Toda a construção de árvores métricas, bolas $B_{T^M}(x, r)$ e coberturas $(r_1, \dots, r_m) \in C(T^M)$ já foi introduzida anteriormente; aqui apenas utilizamos essa estrutura.

Dada uma árvore discreta T, denotamos por T^M a árvore métrica correspondente, obtida substituindo cada aresta por um intervalo de comprimento 1. Notamos que, por construção, as distâncias entre vértices são preservadas:

$$d_{T^M}(u, v) = d_T(u, v) \quad \text{para todo } u, v \in V(T).$$

O lema seguinte (Lema 5.4 em Norin e Turcotte, 2024) formaliza o fato intuitivo de que, se conseguimos cobrir T^M com bolas contínuas de raios r_i, então podemos cobrir T com bolas centradas em vértices, aumentando uniformemente todos os raios em 1.

Lema 7.2.1 (Lema 5.4, Norin–Turcotte)**.** *Se T é uma árvore discreta e $(r_1, \dots, r_m)$ é uma cobertura da árvore métrica correspondente T^M, então $(r_1 + 1, \dots, r_m + 1)$ é uma cobertura de T.*

Demonstração. Seja $v_1, \dots, v_m \in T^M$ tal que

$$T^M = \bigcup_{i=1}^{m} B_{T^M}(v_i, r_i).$$

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $u_i \in V(T)$ uma extremidade da aresta (segmento) de T^M que contém v_i. Em particular, $d_{T^M}(u_i, v_i) \leq 1$, pois u_i está a distância no máximo 1 de qualquer ponto no interior da aresta.

Se $y \in B_{T^M}(v_i, r_i)$, então

$$d_{T^M}(u_i, y) \leq d_{T^M}(u_i, v_i) + d_{T^M}(v_i, y) \leq 1 + r_i,$$

o que implica

$$B_{T^M}(v_i, r_i) \subseteq B_{T^M}(u_i, r_i + 1).$$

Logo,

$$T^M = \bigcup_{i=1}^{m} B_{T^M}(v_i, r_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{T^M}(u_i, r_i + 1).$$

Como $V(T) \subseteq T^M$ e, para vértices, as distâncias em T e em T^M coincidem, temos

$$V(T) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{T^M}(u_i, r_i + 1) \cap V(T) = \bigcup_{i=1}^{m} B_T(u_i, r_i + 1).$$

Isto é, T é coberta pelas bolas discretas $B_T(u_i, r_i + 1)$, e portanto $(r_1 + 1, \dots, r_m + 1)$ é uma cobertura de T, como queríamos demonstrar. □

O Lema 7.2.1 será aplicado diretamente ao final da prova do Teorema 7.1.1: primeiro construiremos uma cobertura de T^M com raios inteiros $(1, \dots, k)$, usando o Teorema 6.2.1; em seguida, aplicaremos o lema para obter uma cobertura de T com raios $(2, \dots, k + 1)$, que será então relacionada ao número de queima.

7.3 Demonstração do Teorema 1.2

Estamos prontos para demonstrar o Teorema 7.1.1. A prova é curta, mas condensa todo o trabalho analítico e probabilístico desenvolvido nos capítulos anteriores. Usaremos explicitamente o Teorema 6.2.1 e o Lema 7.2.1.

Demonstração do Teorema 7.1.1. Seja $0 < \varepsilon < 1$. Queremos mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se G é um grafo conexo com $n \geq N$ vértices, então

$$b(G) \leq (1 + \varepsilon)\sqrt{n}.$$

Definimos

$$\varepsilon' := \varepsilon^2.$$

Aplicaremos o Teorema 6.2.1 com o parâmetro ε' em lugar de ε. Denotamos por $K_{5.3}(\varepsilon')$ a constante fornecida por aquele teorema. Seja

$$N := \max\left\{ \left(K_{5.3}(\varepsilon')\right)^2, \frac{6}{\varepsilon} \right\}.$$

Mostraremos que esse N satisfaz a propriedade desejada.

Seja então G um grafo conexo com $n \geq N$ vértices. Como observado acima, é suficiente considerar uma árvore geradora T de G: qualquer sequência de raios que queima T também queima G, de modo que

$$b(G) \leq b(T).$$

Denotamos por T^M a árvore métrica associada a T, construída anteriormente. O comprimento total de T^M é

$$|T^M| = |E(T)| = n - 1.$$

Definimos agora

$$k := \left\lceil \sqrt{\frac{n}{1 - \varepsilon'}} \right\rceil.$$

Temos

$$k \;\geq\; \sqrt{\frac{n}{1-\varepsilon'}} \;\geq\; \sqrt{\frac{N}{1-\varepsilon'}} \;\geq\; \sqrt{\frac{(K_{5.3}(\varepsilon'))^2}{1-\varepsilon'}} \;\geq\; K_{5.3}(\varepsilon'),$$

pois $1-\varepsilon' < 1$. Além disso,

$$|T^M| = n-1 \;\leq\; n \;\leq\; (1-\varepsilon')\cdot\left(\left\lceil\sqrt{\frac{n}{1-\varepsilon'}}\right\rceil\right)^2 = (1-\varepsilon')k^2,$$

onde usamos o fato de que $k^2 \geq \frac{n}{1-\varepsilon'}$. Assim, T^M satisfaz as hipóteses do Teorema 6.2.1 com parâmetro ε': temos

$$k \geq K_{5.3}(\varepsilon') \qquad \text{e} \qquad |T^M| \leq (1-\varepsilon')k^2.$$

Portanto, pelo Teorema 6.2.1, a sequência de raios inteiros

$$(1, 2, \ldots, k)$$

é uma cobertura de T^M.

Aplicamos agora o Lema 7.2.1. Como $(1, \ldots, k)$ é uma cobertura de T^M, segue do lema que

$$(2, 3, \ldots, k+1)$$

é uma cobertura de T. Em particular, existe uma estratégia de queima de T com k ignições, cujos raios (isto é, os tempos de propagação do fogo em torno de cada ignição) são $2, 3, \ldots, k+1$.

O número de queima $b(T)$ é o menor inteiro ℓ para o qual existe alguma sequência de raios $(r_1, \ldots, r_\ell)$ que cobre T. A existência de uma cobertura com raios $(2, \ldots, k+1)$ implica a cota simples

$$b(T) \leq (k+1)+1,$$

onde o +1 final corresponde à possibilidade de uma ignição inicial de raio zero (inútil para a cobertura métrica, mas compatível com a dinâmica de queima discreta). Assim,

$$b(T) \leq \left\lceil\sqrt{\frac{n}{1-\varepsilon'}}\right\rceil + 2.$$

Usamos agora estimativas elementares para comparar esse valor com $(1+\varepsilon)\sqrt{n}$. Primeiro, pela desigualdade $\lceil x\rceil \leq x+1$ para $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$b(T) \leq \sqrt{\frac{n}{1-\varepsilon'}} + 3.$$

Como $\varepsilon' = \varepsilon^2$ e $0 < \varepsilon < 1$, há uma constante universal (cuja forma exata não é importante aqui) tal que

$$\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon^2}} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo ε pequeno. Em particular,

$$\sqrt{\frac{n}{1-\varepsilon'}} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{n}.$$

Por outro lado, como $n \geq N \geq \frac{6}{\varepsilon}$, temos

$$\frac{3}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{6/\varepsilon}} = \sqrt{\frac{9\varepsilon}{6}} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para $0 < \varepsilon \leq 1$, de modo que

$$3 \leq \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n}.$$

Combinando as duas desigualdades, obtemos

$$b(T) \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{n} + 3 \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{n} + \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n} = (1+\varepsilon)\sqrt{n}.$$

Finalmente, como $b(G) \leq b(T)$, concluímos que

$$b(G) \leq (1+\varepsilon)\sqrt{n},$$

para todo grafo conexo G com $n \geq N$ vértices. Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, isso é equivalente a dizer que $b(G) \leq (1+o(1))\sqrt{n}$, o que demonstra o Teorema 7.1.1. □

7.4 Comentários finais

O argumento deste capítulo encapsula, em poucas linhas, todo o conteúdo analítico e probabilístico desenvolvido anteriormente. O Teorema 6.2.1 fornece, no modelo de árvores métricas, uma cobertura por raios inteiros $(1, \dots, k)$ sempre que o comprimento total da árvore é estritamente menor que $(1-\varepsilon)k^2$. O Lema 7.2.1 mostra que, a partir de tal cobertura contínua, basta aumentar uniformemente os raios em 1 para obter uma cobertura da árvore discreta subjacente.

Ao ajustar cuidadosamente os parâmetros ε' e N, esse procedimento se traduz em uma cota assintótica para o número de queima de qualquer grafo conexo, com erro multiplicativo arbitrariamente pequeno. Dessa forma, o Teorema 7.1.1 fecha o ciclo iniciado na reinterpretação métrica do problema: começamos traduzindo a dinâmica de queima em termos de coberturas por bolas em árvores métricas, passamos por uma etapa fracionária e probabilística via medida de expectativa e controle de momento, e terminamos retornando ao cenário discreto com uma afirmação precisa sobre $b(G)$ em função de n.

Nos capítulos seguintes, é possível explorar direções adicionais, como o papel da estrutura local do grafo (por exemplo, restrições no grau mínimo) na melhoria de constantes, ou ainda discutir em que medida o método analítico desenvolvido aqui pode ser adaptado para outras variantes da dinâmica de queima.

Referências

[Norin e Turcotte 2024] Sergey Norin e Jérémie Turcotte. "The burning number conjecture holds asymptotically". *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 168 (2024), pp. 208–235 (citado nas pgs. 10–14, 24, 44, 45, 53, 54).